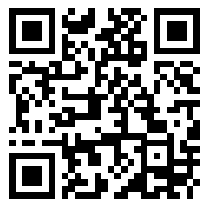
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

BOLLETTINO

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

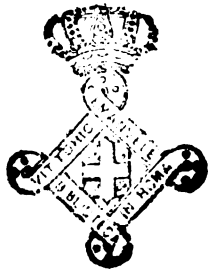
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA



ANNO I.

1898

TORINO

CARLO CLAUSEN

LIBRAIO DELLE LL. MM. IL RE E LA REGINA

1898

Digitized by Google

Proprietà letteraria

Genova. — Tipografia Sordo-muti

Digitized by Google

INDICE

G. Loria. Per la Storia di alcune curve piane. Osservazioni ed apunti - I. La Strofoide, pag. 1.

A. Vassillief. Pafuntii Lvoviteh Tchébychef et son œuvre scientifique. § I, pag. 33; § II, pag. 38; § III, pag. 43; §§ IV e V pag. 81; §§ VI-IX pag. 114 — Liste des travaux de P. Tchébychef, pag. 132.

RECENSIONI ED ANNUNZI

G. A. Maggi. Principi della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale [G. Vivanti], pag. 8. — **F. Enriques.** Lezioni di Geometria proiettiva [C. Segre], pag. 11. — **W. Schell.** Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung [G. L.], pag. 15. — **A. Bertrand W. Russel.** An Essay on the Fundations of Geometry [G. L.], pag. 16. — **M. Simon.** Analytische Geometrie der Ebene [G. L.], pag. 18. — **H. Januschc.** Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre [G. L.], pag. 19. — **E. Webber.** Applicazioni geometriche e analitiche di calcolo differenziale e integrale [G. Vivanti], pag. 20. — **A. Sturm.** Das delische Problem [G. L.], pag. 21. — Ouvre de **Laguerre.** T. I. [G. L.], pag. 46. — **W. Nernst** und **A. Schönflies.** Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften [P. Pizzetti], pag. 48. — **C. A. Laisant.** La mathématique [G. L.], pag. 51. — **G. Vailati.** Il metodo deduttivo come strumento di ricerca [G. L.], pag. 54. — **H. Brocard.** Notes de bibliographie des courbes géométriques [G. L.], pag. 55. — **E. Picard et G. Simart.** Théorie des fonctions algebriques de deux variables indépendantes. T. I [G. L.], pag. 56. — **G. Ricci.** Lezioni sulla teoria della superficie [G. L.], pag. 92. — **G. Ferraris.** Teoria geometrica dei campi vettoriali [G. L.], pag. 93. — **A. Berteu.** Vita dell'abate F. Faà di Bruno [G. L.], pag. 94. — **E. Czuber.** Vorlesungen über Differential- und Integral- Rechnung. I Band [G. Viviani], pag. 98. — **G. Darboux.** Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonées curvilignes, T. I. [E. Daniele], pag. 139. — **G. Loria.** Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, II edizione [B. Levi], pag. 145. — **L. Lévy.** Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques [G. L.], pag. 147. — **V. De Pasquale.** Note all'Algebra complementare del prof. S. Pincherle

Digitized by Google

Parte I. [G. Vivanti], pag. 148. — **G. V. Schiaparelli.** Studio comparativo fra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure [G. L.], pag. 149. — **G. Lazzeri** ed **A. Bassani.** Elementi di geometria, II edizione [F. Giudice], pag. 150. — **H. Weber.** Lehrbuch der Algebra. T. I., II Aufl. [G. L.], pag. 151. — **Jacob Steiner's.** Vorlésungen über synthetische Geometrie, II Th., Aufl. [G, L.], pag. 152. — **F. Klein** Conférences sur les mathématiques receuillies par A. Ziwet et traduites par L. Laugel [G. L.], pag. 153.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

Università di Pavia: Corso di Fisica Matematica. Anno 1895-96 [Prof. Somigliana], pag. 23. — Università di Bologna: Corsi di Analisi superiore. Anni 1894-95 e 1895-96 [Prof. Pincherle], pag. 58. — Università di Torino: Corso libero sulla storia della Meccanica. Anno 1897-98 [Dott. Vailati], pag. 101. — Università di Pisa: Corso di geometria superiore. Anno 1897-98 [Prof. Bertini], pag. 154.

NECROLOGIO

Ernesto Cristiano Giulio Schering. Elenco delle pubblicazioni di E. C. G. Schering, pag. 26. — **Francesco Brioschi** [C. Hermite]. Elenco delle pubblicazioni di F. Brioschi, pag. 62. — **Ermanno Schapira** [M. Cantor], pag. 106. — **Paolo Serret,** pag. 157.

NOTIZIE

La biblioteca Boncompagni — Il I Premio Lobatscheffsky — La legge di Goldbach — Le conferenze del Klein — A proposito del Saggio del Wessel — A. I. G. ossia M. A. — La Revue semestrielle — Per la biografia di Pietro Paoli, pag. 30-32.

I premi dell'Istituto di Francia — Gauss e la teoria delle funzioni ellittiche — La data della visione dantesca — Un concorso olandese — Medaglia Sylvester, pag. 74-80.

Le opere di Erone Alessandrino — Le opere di Gauss — Il secondo premio Lobatschewsky — Il calcolo aritmetico nel Medio Evo — Contributi recenti alla storia delle matematiche — The Theory of Screws — Una versione di Lobatchewski, pag. 109-112.

Alcuni manoscritti relativi alla geometria greca — Premio della fondazione Benecke — Premio della Società Jablonovoski di Lipzia — Il primo centenario di una grande scuola — Temi di matematica posti a concorso dall'Accademia di Madrid — Tema di geometria proposto dall'Accademia del Belgio, pag. 157-160.

Indice dei nomi, p. 161-164.

Digitized by Google

GENNAIO, FEBBRAIO E MARZO 1898.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: Carlo Clausen, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. 6, per l'estero Fr. 7.50. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova. — Numeri separati L. 2 caduno.

SOMMARIO

G. LORIA, *Per la storia di alcune curve piane. Osservazioni ed appunti - I. La Strofoide.*

Recensioni ed annunzi: G. A. MAGGI, *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale* [G. Vivanti]. — F. ENRIQUES, *Lezioni di Geometria proiettiva* [C. Segre]. — W. SCHELL, *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung* [G. L.]. — M. SIMON, *Analytische Geometrie der Ebene* [G. L.]. — H. JANUSCKE, *Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre* [G. L.]. — E. WEBBER, *Applicazioni geometriche e analitiche di calcolo differenziale e integrale* [G. Vivanti]. — A. STURM, *Das delische Problem* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Pavia. Corso di Fisica Matematica.* Anno 1895-96 [Prof. Somigliana].

Necrologio: *Ernesto Cristiano Giulio Schering. Elenco delle pubblicazioni di E. C. G. Schering.*

Notizie: *La biblioteca Boncompagni — Il I Premio Lobatscheffsky — La legge di Goldbach — Le conferenze del Klein — A proposito del Saggio del Wessel — A. I. G. ossia M. A. — La Revue semestrielle — Per la biografia di Pietro Paoli.*

PER LA STORIA DI ALCUNE CURVE PIANE

Osservazioni ed appunti di GINO LORIA

Lo studio delle curve piane particolari presenta per lo storico un interesse speciale, perchè gli è dalle definizioni delle curve particolari note che si partì per giungere gradatamente al concetto di singolarità (ordinarie e straordinarie) e all'idea di curva algebrica generale nel proprio ordine. D'altronde è la investigazione delle proprietà di alcune linee dotate di prerogative speciali che diede la spinta

932,699

Digitized by Google

all'invenzione di nuovi metodi di ricerca, mentre per converso alla loro applicazione a nuove linee essi sono debitori della perfezione che oggi raggiunsero: sicchè si può dire che gli è esaminando gli studi sopra le curve particolari che si arriva a formarsi un'idea chiara del come si costituirono e si svolsero i procedimenti che oggi adoperiamo. Tuttavia la storia di varie linee speciali presenta ancora alcuni punti oscuri: chiarire alcuni di essi e segnalare la esistenza di altri, ecco lo scopo del presente scritto (1).

I. La Strofoide.

Se si considera un cono od un cilindro di rotazione ed una tangente t di esso perpendicolare alla generatrice passante pel punto di contatto, ogni piano π condotto per t taglia la superficie data in una conica di cui si determinino i fuochi F_1 e F_2. Rotando π attorno a t i punti F_1 e F_2 generano una curva Φ la quale è evidentemente situata nel piano σ condotto per il punto di contatto di t perpendicolarmente a questa tangente. Applicando il noto teorema di Dandelin e Quetelet, che insegna a costruire i fuochi della sezione prodotta in un dato cono rotondo da un dato piano, si trasforma la primitiva *definizione stereometrica* della curva Φ in una notevolissima *definizione planimetrica*, che può enunciarsi come segue: « date due rette p e q segantisi in S ed un punto A sulla seconda, una trasversale a condotta per A tagli p in P: si prendono su di essa i punti F_1 e F_2 le cui distanze da P siano eguali a PS; il luogo dei punti F è una curva Φ, relativa ad un cono o ad un cilindro secondochè p e q sono oblique o tra loro perpendicolari ».

È verso la metà del secolo scorso che le curve Φ fecero il loro ingresso nella letteratura matematica; chè gli è nel 1757 che venne pubblicato il Vol. IV di *Instituti Bononiensis Commentarii* ove si trovano inserite due memorie di Gregorio Casali (1721-1802) intitolate *De conicorum sectionum foci*s e dedicate appunto alle curve Φ. Ma la data della loro

(1) Hanno intento somigliante i miei articoli *Une courbe oubliée* (Mathèsis, 1897) e *Versiera, visiera e pseudoversiera* (Bibliotheca mathematica, 1897).

Digitized by Google

nascita risale ad un secolo dianzi: chè per attestazione del Casali esse vennero considerate anteriormente da Guido Grandi (1671-1742) in un trattato inedito, e prima di lui da Evangelista Torricelli (1608-1647) che ne parlò in una delle sue opere: ciò spiega il nome « pteroides (1) torricellinae » adoperato dal Casali per designare le curve Φ. Sembra pertanto che sia al celebre discepolo di Galileo che devesi fare risalire l'invenzione delle curve di cui si tratta; senonchè, a parte che in nessuna delle opere (incluse le lettere) edite dal Torricelli se ne trova traccia, esistono due lettere a lui dirette sin dal 1645 ove si legge la definizione planimetrica delle curve Φ relative a cilindri, ed anche il nome con cui le designa il Casali. Le lettere a cui si allude furono scritte da Roma da F. du Verdus, che, notoriamente è quel « gentilhomme bourdelois » redattore delle celebri *Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes* del Roberval (1602-1675): una è datata « 19 maggio 1645 », l'altra è di poco anteriore essendo certamente posteriore al « 15 marzo 1645 » (2); la sostanza di esse è concordante, contenendo entrambe « la descrizione d'una linea che in Francia addimandano Ala, ò Teroide » (p. 456) dal du Verdus ricevuta « uno di questi ultimi giorni » (p. 453) e l'applicazione (ideata dal du Verdus medesimo) ad essa del metodo delle tangenti detto del Roberval: notevole è il fatto che alla curva Φ dianzi considerata ne è sempre aggregata una seconda, quella cioè che (adoperando le notazioni usate prima) è ad essa simmetrica rispetto al punto A.

Le or citate lettere, se da un lato dimostrano improprio l'aggettivo adoperato dal Casali per indicare le curve Φ, dall'altra fanno nascere due questioni. La prima è di sapere in qual misura il Torricelli abbia risposto all'invito seguente col quale chiudesi la seconda delle lettere citate: « Io poi la supplico resti servita mandarmi qualche proprietà di detta linea, ò delli suoi piani, ò solidi con la licenza di mandarla

(1) Da πτερόν = ala.

(2) Vennero pubblicate, assieme ad altre, dal Boncompagni nel T. VIII (1875) del *Bollettino di bibliografia ecc.*

Digitized by Google

come cosa trovata da V. S. à quel mio amico che di Parigi mi manda detta descrizione, acciò che io li possa dare un segno di quanto io stimi la sua amicizia mandando le sue dimostrazioni di linee all' Archimede dei nostri tempi » (p. 456); che vi abbia risposto sembra emergere da quanto assevera il Casali; come e quanto lo abbia fatto non risulta dalle lettere del Torricelli sino ad ora pubblicate (1); epperò *si aggiunge una nuova ragione alle tante che fanno desiderare vengano finalmente tolte dagli archivi e poste nel dominio di tutti le opere complete di Evangelista Torricelli* (2). L'altra questione è di sapere chi sia il geometra francese che immaginò e fece conoscere al du Verdus la generazione planimetrica della curva Φ relativa al cilindro: ora se si tien conto dell' indole delle ricerche del Roberval e si ricordano le relazioni di amicizia che egli ebbe col du Verdus, sembra estremamente verosimile la conclusione che l' inventore di tal curva sia appunto il celebre professore di Parigi.

La nuova curva inventata in Francia verso il 1645 sembra aver acquistata scarsissima rinomanza; giacchè nel 1715 A. de Moivre la ritrovò per suo conto e ne fece oggetto di un lavoro speciale; infatti nell' articolo *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the Foliate* (Philos. Transactions, n. 345), della curva Φ relativa al cilindro è esposta la definizione planimetrica, è trovata la quadratura ed è avvertita l' analogia di forma colla foglia di Cartesio. Non crediamo andar errati affermando che gli è a questo articolo che si deve l' introduzione di detta curva in opere didattiche assai diffuse e pregiate quali le *Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* di D.na Maria Gaetana Agnesi (T. I, Milano 1748, p. 378-380 e 391-392), l'*Analyse des lignes*

(1) Dal Boncompagni (nel vol. precitato del *Bollettino*) e dal Ghinassi (*Lettere fin qui inedite di Evangelista Torricelli*, Faenza, 1864).

(2) Cf. anche la mia nota *Evangelista Torricelli e la prima rettificazione di una curva* (Rend. dell'Acc. dei Lincei, 5 Dic. 1897); in proposito della quale il Prof. Zeuthen recentemente esprimevami « sa curiosité de connaître encore plus du côté de Torricelli ».

Digitized by Google

courbes algébriques del Cramer (Génève 1750, p. 411) e le *Institutiones analyticae* di Riccati e Saladini (Bononiae, 1765, p. 328).

La considerazione stereometrica delle curve Φ, che il Casali svolse con tanto amore e tanta dottrina, rimase sconosciuta e sepolta nelle Memorie dell'Accademia di Bologna, tantochè il Tortolini nel 1860 credette indispensabile additare all'attenzione dei dotti il lavoro del Nobile bolognese (1); molto opportunamente egli lo fece, perchè nel frattempo tale considerazione era stata ripresa *ex-novo* da A. Quetelet, il quale, ignorando le investigazioni del Casali, espose nella seconda parte della *Dissertatione de quibusdam locis geometrici* (Gand, 1819) le proprietà più cospique delle curve Φ, considerate nel cono o nel cilindro ed in conseguenza da lui chiamate « focali » (2) o « focali regolari » secondochè si riferiscono a coni o cilindri: altre proprietà delle prime si leggono nel *Mémoire sur quelques propriet's remarquables de la focale parabolique* del Dandelin (Mem. de l'Acad. de Bruxelles, T. II, 1822), altre proprietà delle seconde nella dissertazione di E. Külp *De curva focali regulari* (Mannheim, 1823). A queste, nuove proprietà vennero aggiunte di poi: notiamo soltanto quella di ogni curva Φ di essere generabile come luogo del punto di contatto delle tangenti condotte da un punto ai cerchi di un fascio (Charles, *Aperçu historique*, Note IV).

Tuttavia non è in queste ricerche che deve rintracciarsi il seme della rigogliosa fioritura rappresentata dagli scritti sulle curve Φ dovute specialmente a geometri francesi; è piuttosto nella seguente questione che venne proposta nel 1840 come tema di concorso nei Licei di Francia e di cui Chasles diede una soluzione: « È data un'infinità di coniche omofocali ed un punto nel loro piano; si domanda: 1.° Qual è il luogo geometrico dei punti di contatto delle tangenti condotte da quel punto alle dette curve; 2.° Qual è il luogo geometrico dei piedi delle normali condotte alle stesse curve

(1) V. la rivista bibliografica *Sulla curva logociclica* in Annali di Matematica, T. III, p. 317-324).

(2) Altri preferisce il nome « focales à nœud ».

Digitized by Google

dal punto dato (1); 3.° Qual è il luogo geometrico dei piedi delle perpendicolari calate dal punto dato sulle sue polari rispetto alle coniche date ». Tale questione, che è in tutte le sue parti risolta da curve Φ, venne riproposta nel 1861 come tema al concorso di ammissione alla Scuola normale di Parigi, ed in conseguenza venne nuovamente attratta l'attenzione di insegnanti e discepoli sulle curve che lo risolvono.

Sarebbe troppo lungo il dar qui un completo elenco degli scritti che trattano della curva in questione: solo notiamo che il primo lavoro francese che in esso s'incontra contenuto è la *Note sur le folium de Descartes* del Midy (Nouvelles Annales de Mathématique, T. III, 1840, p. 293 (2) e che il più antico lavoro ove s'incontra il nome di *strofoide* (derivato da στρέφος che dà στρέφω - volgere, torcere) (3) è quello intitolato *La strophoïde* (Nouv. Ann., T. V. 1846, p. 470) dovuto al Montucci ed erroneamente attribuito a G. Ritt (4). Aggiungiamo che la focale regolare considerata nel piano venne concepita indipendentemente da tutti i geometri già citati e studiata *ex-novo* dal Lehmus, che per la sua

(1) Estendendo allo spazio tale definizione si arriva a concepire il luogo dei piedi delle normali condotte di un punto fisso ad un sistema di quadriche omofocali; tale luogo è una curva del 5.° ordine, che s'incontra anche nella teoria dei momenti d'inerzia e si chiama *strofoide sghemba*. V. L. Lipkin, *Ueber die räumlichen Strophoiden* (Jena, 1870).

(2) Cfr. *L'Intermédiaire des mathématiciens*, T. IV, 1897, p. 87.

(3) Ivi la curva è incontrata incidentalmente in modo che val la pena di ricordare. Per discutere la foglia di Cartesio il Midy ne scrive la equazione sotto la forma

$$y = x \sqrt{\frac{a - x}{a + 3x}}$$

e poi la paragona colla curva avente per equazione

$$y = x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}};$$

ora questa è appunto una curva Φ relativa ad un cilindro, ed il Midy ne indica la definizione planimetrica.

(4) Il nome di strofoide venne adottato, appena suggerito, anche in Italia; v. infatti: G. Sacchi, *Sulla geometria analitica delle linee piane* (Pavia, 1854) p. 9.

Digitized by Google

forma chiamolla « kukumaeide » (*Aufgaben aus der höheren Mathematik*, Berlin 1842, p. 120), da J. Booth, che per le sue relazioni coi logaritmi e le sue analogie col cerchio la denominò « logociclica » (*On the logociclic curve and the geometrical origin of logarithus*, Quart. Journal of Mathem., 1858, p. 185; e *A Treatise on some new geometrical methods*, T. I, London 1877) e dal Rummer che, osservando in essa molte proprietà connesse alla nozione di gruppo armonico, la denominò *curva armonica* (*Neue Sätze über eine krumme Linie mit vorzügweize geometrische Ableitung*, Heidelberg, 1868).

I numerosi scopritori che ebbe la strofoide, dei quali fanno fede gli svariati nomi con cui è designata, inducono ad escludere tale curva dal catalogo di quelle prodotte dalla fantasia talora capricciosa dei geometri; e tale giudizio viene confermato, tanto dalle numerose elegantissime proprietà di cui essa venne dimostrata in possesso, quanto dalle applicazioni che essa riceve alla geometria descrittiva (J. de la Gournerie, *Traité de géometrie descriptive*, II ed., 3.e Partie, Paris 1885, p. 149-150) ed all'ottica geometrica (v. l'articolo *Identité de la strophoïde avec la focale à nœud, son application à l'optique géométrique*, Nouv. Ann., 1897, p. 262-265).

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

G. A. Maggi. — *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi. Corso di meccanica razionale.* — Milano, Hoepli, 1896, XVIII-503 p. 8.°

L'autore di quest'opera si mostra seguace dell'idea di Kirchhoff, di considerare come scopo della meccanica la *descrizione* completa e quanto è possibile semplice del movimento; egli infatti si propone di stabilire la dinamica indipendentemente dalla legge d'inerzia, e di dare una definizione puramente matematica della massa. Egli vuole anche bandire dalla Meccanica ogni idea, che ricordi anche lontanamente il concetto d'infinitesimo. Da tutto ciò, e dall'uso costante dei vettori, fu condotto l'autore ad un modo di esprimersi alquanto diverso dal comune, del quale tenteremo di dare un'idea a chi legge.

Dopo un'Introduzione, contenente definizioni e teoremi analitici e geometrici diversi, si entra nella Cinematica, o *descrizione del movimento* (§ 5), colla definizione di *spostamento* d'un punto e d'un sistema. Viene studiato particolarmente lo *spostamento dislocatorio semplice*, in cui le componenti dello spostamento d'ogni punto sono funzioni lineari delle coordinate di esso. S'introduce a questo punto (§ 109) il *tempo*, come una quantità proporzionale all'angolo di cui gira il globo terrestre fra il principio e la fine del fenomeno, — e come una funzione del tempo si presenta il *movimento* d'un punto o d'un sistema durante un certo intervallo. La *velocità media* di un punto nell'intervallo da t a $t + \Delta t$ è un vettore, la cui direzione è quella dello spostamento corrispondente all'intervallo Δt, la cui lunghezza è il quoziente della grandezza di questo spostamento per Δt. Il limite della velocità media per $\lim. \Delta t = o$ è la *velocità* del punto mobile al tempo t. L'insieme delle velocità di tutti i punti d'un sistema al tempo t è l'*atto di movimento* del sistema alla fine di questo tempo.

Analogamente si definisce l'*accelerazione*.

Ci si permetta di richiamare qui una definizione (§ 102), in vista della capitale importanza che essa ha nell'opera che stiamo esaminando. Uno spostamento dicesi *estremamente piccolo*, se i coefficienti numerici indipendenti dall'unità di misura che lo determinano sono abbastanza piccoli, perchè le quantità misurate dai loro prodotti e potenze superiori alla prima riescano insensibili ai mezzi di osservazione che rilevano con sicurezza le quantità misurate dalle prime potenze dei coefficienti medesimi. Ora si presenta naturale la domanda: dato che la riduzione, più o meno velata, del movimento agli elementi

Digitized by Google

infinitesimi è *inevitabile*, vale egli la pena di sfuggire il metodo infinitesimale — il cui rigore, da Cauchy in poi, è al disopra d'ogni dubbio —, per ricorrere ad un concetto d'approssimazione dipendente dal grado di potenza dei nostri mezzi di misura? Non è qui il luogo di rispondere a tale domanda, nè spetta a noi il farlo.

Passiamo ormai alla Dinamica, che si occupa della *deduzione del movimento dalle circostanze capaci di determinarlo*, e viceversa (§ 5).

Una *figura materiale* (§ 206) è una porzione continua di spazio in movimento continuo e regolare (cioè che può rappresentarsi analiticamente mediante funzioni derivabili), dotata degli *attributi* seguenti:

1.° Le accelerazioni medie di due figure materiali *isolate* sono sempre parallele ed opposte, e il rapporto delle loro grandezze è costante per le stesse due figure. Tale rapporto dicesi la *massa* della prima figura rispetto alla seconda.

2.° Se p, q sono le masse di A, B rispetto a C, $\frac{p}{q}$ è la massa di A rispetto a B.

3.° Se una figura materiale è *isolata con più altre insieme*, la sua accelerazione media è la risultante di quelle che essa avrebbe se fosse isolata separatamente con ciascuna di queste.

4.° Ogni parte d'una figura materiale è una figura materiale.

Ecco poi i quattro postulati, sui quali l'autore fonda la Dinamica:

1.° Ogni *corpo naturale* si comporta, o come un sistema geometricamente eguale di figure materiali, o come il limite d'un tale sistema quando ogni figura componente tende ad un punto.

2.° Le accelerazioni medie di due corpi isolati insieme, nei quali si accumulano più *condizioni fisiche*, sono le risultanti delle accelerazioni medie che sarebbero dovute alle singole condizioni.

Dal primo postulato segue che ogni corpo naturale possiede una massa determinata: e da ciò si deduce l'*equazione di continuità*.

La *forza motrice* d'un corpo in un istante è il vettore, la cui direzione è quella dell'accelerazione media del corpo nel dato istante, la cui grandezza è il prodotto della grandezza di questa accelerazione per la massa del corpo.

Da questa definizione e dai due primi postulati segue la legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione, e quella del parallelogrammo delle forze.

Da quanto si è detto risulta chiaramente che il nostro autore non assume come un risultato dell'esperienza il fatto che due corpi agiscono l'uno sull'altro, ma bensì quello che essi si muovono in un modo determinato; e questo è perfettamente corretto. Ma non ci sembra altrettanto vero che con ciò sia evitato completamente il concetto dell'influenza reciproca; chè anzi ci par di vedere tale concetto far

Digitized by Google

capolino nelle frasi: *figure isolate, isolate l'una con l'altra*, di cui invano cercheremmo la spiegazione nel libro che ci sta dinanzi.

Per entrare nello studio dei problemi meccanici, l'autore è ormai costretto a passare dalla *figura materiale* al *punto materiale*, un passaggio, di cui si vede qualche traccia già nel 1.° postulato. Ora dunque si stabiliscono i due ultimi postulati:

3.° Se m, m' sono le masse di due corpi isolati A, B, ed F, F' le loro forze motrici, il vettore, la cui direzione coincide con quella di F e la cui grandezza è $\frac{F}{m\,m'}$, tende ad un limite determinato, quando i raggi di due sfere contenenti rispettivamente nel loro interno i due corpi decrescono indefinitamente. Questo vettore limite dicesi *forza elementare*, e s'intende riferito al centro di massa del corpo.

4.° La grandezza della forza elementare è funzione simmetrica delle posizioni dei due centri di massa, e la sua direzione coincide colla congiungente di questi.

La forza elementare d'un corpo di massa m può considerarsi come la forza motrice del suo centro di massa, il quale allora viene designato come un *punto materiale* di massa m.

Quanto abbiamo detto — a cui aggiungiamo l'osservazione che l'autore, seguendo le idee più moderne, non separa la Cinematica dai corpi rigidi da quella dei sistemi continui — sarà per avventura sufficiente a porre in luce i tratti più caratteristici dell'importante ed originale opera di cui stiamo discorrendo. Quanto al suo contenuto, possiamo convenire coll'autore che vi si trova più e meno che negli ordinari trattati di Meccanica; ma il più compensa in larghissima misura il meno, giacchè, se il *difetto* si limita tutt'al più alla omissione di qualche questione particolare, l'*eccesso* ci presenta un insieme di argomenti interessanti ed elevati, appartenenti, più che alla Meccanica razionale, alla Meccanica superiore od alla Fisica matematica. Dobbiamo poi segnalare il rigore e l'eleganza estrema dei metodi analitici. L'autore lascia in disparte gli svariati artifizi di calcolo, di cui si fece sinora troppo largo uso in Meccanica, e ricorre ad ogni passo, come ad un potente ausiliario, alla teoria degli integrali multipli, la quale ad esso pure deve notevoli progressi.

Chiudiamo questo scritto coll'augurio che l'opera del prof. Maggi, la quale segna un nuovo cammino nel campo della Meccanica, dia occasione a nuove e feconde discussioni sui principî di questa importantissima fra le scienze.

Messina, dicembre 1897.

G. VIVANTI.

Digitized by Google

FEDERIGO ENRIQUES. — *Lezioni di Geometria projettiva.* — Bologna, Zanichelli, 1898. Pag. IX-377.

Le lezioni del Prof. ENRIQUES, pubblicate in questi giorni, vengono a prendere un bel posto accanto ad altri ottimi trattati di cui s'è arricchita negli ultimi anni la letteratura matematica italiana. Esse seguono l'indirizzo della classica *Geometria di posizione* dello STAUDT: scostandosene soltanto dove era possibile introdurre dei miglioramenti. E l'Enriques ha saputo farne alcuni, degni di lode.

Come si sa, nell'opera dello Staudt non sono messi bene in evidenza i postulati che le servono di base. Recentemente alcuni giovani geometri italiani si sono occupati in modo speciale della questione: e fra essi appunto l'Enriques, nei suoi corsi all'Università di Bologna ed in una Nota pubblicata nel 1894 (1). Nel suo libro egli si serve di quelle sue ricerche, tenendo il debito conto delle esigenze didattiche. Alcune osservazioni intuitive conducono ad enunciare con precisione certi postulati, scelti per modo che da essi si possan poi trarre, non solo con rigore, ma anche con semplicità, tutte le proposizioni fondamentali della geometria di posizione. Questa condizione della semplicità è essenziale per la scuola. Ad essa non soddisfarebbe, e quindi riuscirebbe ad una cattiva opera *didattica*, se anche ottima dal punto di vista *scientifico*, chi volesse scindere ogni postulato nelle sue più minute parti, scartando quelle che si posson dedurre logicamente dalle altre, e dimostrando l'indipendenza logica delle proposizioni rimaste.

Ciò non fa l'A. Completato lo spazio coll'introduzione degli elementi *improprî* (all'infinito), egli pone tre postulati relativi alla determinazione degli elementi (punti, piani e rette) mediante congiungimento o mediante intersezione di due o tre elementi; poi altri due relativi alla possibilità di ordinare col pensiero gli elementi di una forma di 1.ª specie, ed al carattere projettivo degli ordinamenti naturali. Con ciò si posson già dimostrare i teoremi dei triangoli omologici, le proprietà dei gruppi armonici (2) ecc. Ma per poter procedere oltre occorre ancora il postulato della continuità, traduzione geometrica di quello ben noto del DEDEKIND. È merito dell'A. l'averlo assunto e svolto sì da trarne col puro ragionamento varie proposizioni per le quali si suol ricorrere, volta per volta, all'intuizione. Da quel postulato egli deduce anzi tutto il seguente teorema relativo agli ele-

(1) *Sui fondamenti della Geometria projettiva.* Rendiconti dell'Istituto Lombardo, ser. 2.ª, t. 27.

(2) Fra cui quella che l'A. pel primo ha rigorosamente dimostrata, che il 4.° armonico dopo tre elementi distinti non coincide con alcuno di questi.

Digitized by Google

menti uniti di una corrispondenza biunivoca ordinata tra gli elementi di una forma di 1.ª specie: se in una tal corrispondenza un segmento della forma ha per corrispondente un segmento che lo contiene, esisterà in esso un elemento unito che, in un verso assegnato, non è preceduto da altri elementi uniti. Con questo teorema poi l'A. dimostra che una corrispondenza ordinata *discorde* ha sempre due elementi uniti, che separano ogni coppia di elementi omologhi; e che se due coppie di elementi di una forma di 1.ª specie non si separano esiste una coppia che le separa armonicamente. E di esso ancora si serve per riempire quella lacuna che si trovava nella dimostrazione di Staudt del teorema fondamentale della Geometria proiettiva; e più oltre per dimostrare rigorosamente che due coniche con un punto comune (non di contatto) hanno almeno un altro punto comune.

La legge di dualità nella geometria di posizione dello spazio, cioè il fatto che riman valida ogni proposizione grafica quando si scambino punti e piani, ecc., è conseguenza dell'esser permessi tali scambi in tutti i postulati fondamentali. In modo analogo si dimostrerebbe che vale una *legge di dualità nel piano:* e qui l'A. ha aggiunto un'osservazione semplice, ma importante. Dimostrando cioè in questo modo la legge di dualità nel piano, essa diverrebbe applicabile solo a quelle proposizioni che si dimostrano senza uscir dal piano. Invece essa è valida anche per quelle che si dimostrano con costruzioni spaziali: perchè esse, mediante projezione, dànno proprietà relative alla stella, dalle quali con la legge di dualità spaziale si ottengono le volute proposizioni di geometria piana.

L'A. segue lo Staudt tanto nella definizione delle projettività quanto in quella delle coniche: e ben a ragione. Com'è stato osservato ripetutamente, l'artifiziosità, che taluno potrebbe trovare nella definizione delle forme projettive di 1.ª specie mediante il corrispondersi dei gruppi armonici, scompare, e cede il posto alla massima naturalezza, quando quelle forme si considerino entro forme projettive di specie superiore. E quanto alla introduzione delle coniche come luoghi di punti uniti in polarità piane, non occorre ridire che essa è la definizione più simmetrica e più generale, e dà subito numerose proprietà che sono fra le più ragguardevoli delle coniche. Va rilevato pure che il passaggio da essa alla generazione delle coniche con fasci projettivi vien fatto dallo Staudt mediante un teorema che è per se stesso molto importante, perchè da esso si traggono immediatamente, ad esempio, varie proprietà metriche delle coniche: come si vede anche in queste *Lezioni.*

Gli elementi imaginari non vengono introdotti: solo ne è fatto un cenno nell'*Appendice,* che sta alla fine. Nè di questa esclusione si può muover rimprovero all'A. Quel che, ricorrendo agli elementi imaginari (a coppie), si guadagna in generalità di trattazione, si perde forse in

Digitized by Google

facilità; e nei nostri corsi di Geometria projettiva sintetica, diretti a studenti del 1.º anno d'università, se potrà convenire talvolta d'introdurre sistematicamente le coppie di elementi imaginari, tal altra invece potrà convenire di escluderli.

Sebbene le *proprietà metriche* non siano mai adoperate nelle dimostrazioni delle proprietà grafiche, pure non mancano; esse sono state opportunamente intercalate, contrassegnate con un asterisco: il che è preferibile ad una completa separazione, perchè rende più vario ed attraente l'insegnamento. Molto ben fatta in quelle applicazioni metriche, e particolarmente nello studio delle similitudini ed uguaglianze (congruenze), dirette e inverse, è l'introduzione metodica dell'*involuzione assoluta* sulla retta impropria del piano, e così della *polarità assoluta* nel piano improprio o in una stella propria; quindi anche delle eguaglianze sulla retta impropria e sul piano improprio. Grazie allo studio, così indirizzato, delle corrispondenze di eguaglianza (nel quale è anche convenientemente usata la nozione di elementi uniti *associati* di un'omografia), si riesce a dimostrare rigorosamente e semplicemente che tutte le proprietà metriche delle figure si posson riguardare come relazioni grafiche di queste colla retta o piano improprio, e coll'involuzione o polarità assoluta. E con ciò anche diventa facile l'estensione, quando è permessa, della legge di dualità alle proprietà metriche; e d'altra parte rimane ben chiarita la possibilità o no di risolvere certi problemi determinati con dati strumenti (compasso, riga semplice, riga a due bordi ecc.), o con figure fisse date (un cerchio col centro, ecc.).

Rileverò ancora nell'Appendice il cenno della Geometria *astratta* (la quale si ottiene togliendo agli elementi, punti, rette..... ogni significato speciale connesso al mondo fisico, e dando loro invece un senso più generale), e l'applicazione ingegnosa che l'A. ne fa per stabilire le coordinate projettive. Osservando che lo spazio *analitico*, i cui elementi sono i gruppi omogenei di 4 numeri, soddisfa ai postulati della geometria di posizione, si pone una corrispondenza projettiva fra esso e l'*ordinario* spazio di punti: le quaterne di numeri che così vengono a corrispondere ai punti sono le coordinate projettive.

L'opera tutta è fatta con arte e discernimento. È proporzionata, armonica, nelle sue varie parti. Lo stile è chiaro, preciso; l'esposizione è più diffusa là dove sono concetti che potevano riuscire più difficili ai lettori, giustamente concisa altrove. Come già s'è detto, la trattazione non è limitata alla geometria piana, ed a ragione: chè riesce molto utile per gli studiosi il rivolgerne la mente alla geometria dello spazio, anche se per ciò occorra sacrificare qualche proprietà relativa al piano. In nessun argomento vi sono sviluppi eccessivi: tutto il libro è condotto con sobrietà. Talora anzi si direbbe che il desiderio di sobrietà

Digitized by Google

abbia tolto che si ponessero delle proposizioni, che siamo abituati di vedere nei trattati di Geometria projettiva, o che per altre ragioni si potrebbero desiderare. Così, ad esempio, dove si parla di coniche osculatrici non è costruito il cerchio osculatore; nel capitolo relativo ai fuochi di una conica non s'incontra la così detta involuzione focale sugli assi, nè vien data la proprietà angolare che ne deriva delle due tangenti e dei due raggi focali passanti per un punto esterno, e nulla si dice della schiera omofocale; si parla d'intersezioni di due coniche quando hanno un punto comune, e così pure del sistema di una conica ed una polarità uniforme (per la ricerca delle sezioni circolari di un cono quadrico), ma non si considerano gli elementi comuni a due polarità qualunque (1). Accenno queste cose solo per fare una relazione completa, ma non per muoverne rimprovero all'A. Invece mi permetterò di sottoporgli, terminando, qualche dubbio intorno ad una mancanza, d'indole più generale, che credo si possa rilevare non solo in queste *Lezioni* ma in parecchi dei corsi di Geometria projettiva che si fanno nelle Università italiane.

Lo sviluppo naturale della Geometria projettiva ha condotto a renderla indipendente dalla Geometria elementare; ed ha quasi fatto dimenticare quello che pei suoi fondatori era forse lo scopo principale della nuova scienza: la deduzione di nuove proprietà da proprietà già note, mediante le trasformazioni delle figure coi metodi della projezione centrale, delle polari reciproche, e in generale dell'omografia e della dualità, ecc. Ora, per quanto sia lodevole svolgere tutta la scienza con purezza di metodo, io credo che nella scuola convenga aggiungere a tale svolgimento puro varie applicazioni di quei metodi di trasformazione a proprietà note di geometria elementare. I nostri studenti s'interessano molto a siffatti passaggi da proposizioni che conoscono a proposizioni nuove, dai cerchi alle coniche.....: sì che quand'anche da tali cose apparisse turbata l'armonia dell'edifizio geometrico, converrebbe sempre introdurle per aumentare efficacia all'insegnamento. D'altra parte i gruppi di trasformazioni che son fondamentali per le varie geometrie, elementare, projettiva, delle trasformazioni birazionali, delle trasformazioni continue, ecc., non servono solo a caratterizzarne gl'indirizzi, le proprietà, ma altresì a ridurre le figure a certi tipi, che riescan più semplici da studiare, sotto punti di vista inferiori. È così che lo studio delle coniche in geometria projettiva può dedursi da quello dei cerchi già fatto in geometria elementare: come poi dalle proprietà projettive delle cubiche piane si posson trarre quelle proprietà di tutte le curve ellittiche le quali sono invariabili per trasformazioni birazionali; e così via. Si può obiettare che, a quanto pare, l'evolu-

(1) Mancano anche, quasi completamente, gli esercizî.

Digitized by Google

zione della scienza tende a sostituire lo studio diretto degli enti geometrici, sotto il punto di vista assegnato, alla applicazione di trasformazioni che, in certo senso, semplifichino quegli enti. Ma ciò non si può dire con sicurezza, e di tutti i campi di ricerche: così, nelle questioni relative alla esistenza ed alla composizione di gruppi di trasformazioni si hanno appunto esempi in contrario. E in ogni modo qui si tratta principalmente della opportunità didattica: la quale ora, come tante altre volte, sembra condurre a tener conto dello sviluppo storico della scienza.

Torino, gennaio 1898.

C. SEGRE.

W. SCHELL. — *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Curventheorie.* — Zweite erweiterte Auflage. — Leipzig, Teubner, 1898, p. VIII + 163. 8.°

Quasi quarant'anni separano la prima edizione di questo libro dalla seconda: un periodo di tempo considerevole per lunghezza e più ancora pei grandi progressi che in esso ha compiuto la geometria differenziale e per la profonda modificazione che subirono le idee dei matematici sull'essenza dei metodi *puri* ed il valor relativo dell'analisi e della geometria. Di quelli l'A. tenne il debito conto (basti a provarlo, oltre a molte aggiunte, l'introduzione di un nuovo capitolo sulla geometria cinematica considerata nella sua applicazione alle curve sghembe), ma questo mutamento nelle idee dominanti rende antiquati certi apprezzamenti ed inaccettabile il nome di « esposizione puramente geometrica » di cui l'A. ritenne meritevole il suo modo di procedere. Che nella geometria differenziale si possano adoperare, anzi, in tesi generale, sian degne di preferenza, le argomentazioni indipendenti dall'uso delle coordinate è cosa accettata anche dai migliori analisti che esposero tal ramo di scienza (Darboux e Bianchi); ma d'altronde è notorio (e traspare da innumerevoli passi dell'opuscolo dello Schell) che affinchè tali ragionamenti siano pienamente rigorosi è *oggi* indispensabile erigerli sopra una base analitica; onde sarebbe stato assai meglio che l'A. lo dichiarasse esplicitamente, piuttosto che mascherare il vero stato delle cose sotto imprecise definizioni pseudosintetiche quali sono le seguenti: « Una curva d'ordine m è una curva tale che su ogni piano si trovano al più m suoi punti; una curva di classe n è una curva tale che per ogni punto passano al più n de' suoi piani osculatori. Le curve di determinato ordine e classe determinata chiamansi curve algebriche, quelle di ordine e classe infiniti trascendenti ».

Digitized by Google

Malgrado queste lievi mende, più di forma che di sostanza, lo scritto dell'egregio autore delle *Theorie der Bewegung und der Kräfte* si conserva un'ottima guida per chi vuole apprendere la geometria differenziale delle curve sghembe (tanto più che l'A. ha cura di segnalare quei problemi di cui tuttora si desidera una soluzione); ed anche coloro che conoscono tal ramo di scienza vi apprenderanno cose che non si trovano nelle consuete esposizioni di essa: ciò risulta dalla semplice ispezione dell'indice seguente delle materie trattate dallo Schell:

Introduzione. *Cap. I.* La curva in relazione con le rette ed i piani. Retta tangente e piano tangente. Retta normale e piano normale. Piano osculatore e normale principale, piano rettificante e binormale. Elementi notevoli di una curva. *Cap. II.* Angolo di contingenza, angolo di torsione, angolo di torsione totale. Curvatura delle curve; raggio di curvatura. *Cap. III.* La superficie dei piani osculatori o delle tangenti e le evolventi. *Cap. IV.* La superficie dei piani normali o degli assi di curvatura e le evolute. *Cap. V.* La sfera osculatrice ed il cono rotondo osculatore. *Cap. VI.* La superficie rettificante. *Cap. VII.* La superficie delle normali principali o dei raggi di curvatura. *Cap. VIII.* Le curve di curvatura costante e le curve aventi le stesse normali principali. *Cap. IX.* La superficie delle binormali e la superficie dei piani di curvatura totale. *Cap. X.* L'elica osculatrice e la lossodromia conica osculatrice. *Cap. XI.* Geometria cinematica delle curve sghembe. *Cap. XII.* Le superficie ciclificanti. *Cap. XIII.* Le evolutoidi. Chiusa. G. L.

An Essay on the Fundations of Geometry, by BERTRAND A. W. RUSSEL. — Cambridge, University Press, 1897, 8.° gr. p. XVI + 201.

L'idea di esaminare dal punto di vista filosofico i principî sui quali riposa la geometria non è nuovo: tutti infatti ricordano i passi relativi a tale argomento delle opere di Kant e Stuart Mill, nonchè un opuscolo che Benno Erdmann consacrò a *Die Axiome der Geometrie* (Leipzig, 1877) e che meritò il plauso universale. Ma in questi ultimi vent'anni nuovi contributi vennero dati alle questioni collegate ai fondamenti della scienza dell'estensione da matematici e da filosofi, onde non è sragionevole nè privo di promesse il tentativo di trattare nuovamente tali questioni: ed è appunto come frutto di un tentativo di tal fatta che ci si presenta l'opera del sig. Russel. Nella quale, dopo una introduzione, destinata a definire il problema da risolvere mediante le sue relazioni con la logica, la psicologia e la matematica tutta, l'A tesse una breve storia della metageometria (Cap. I), fa (Cap. II) una esposizione critica delle idee di Kant, Riemann, Helmholtz Erdmann, Lotze e Delbœuf, sottopone (Cap. III) ad un'analisi accurata

Digitized by Google

e minuta tanto gli assiomi della geometria proiettiva, quanto quelli della geometria metrica, e chiude (Cap. IV) con una rassegna delle conseguenze filosofiche di quanto espose.

Durante il secolo che va spegnendosi il modo di considerare l'intima natura degli assiomi della geometria è radicalmente mutato; mentre nel 1775 Bailly credevasi in dovere di rimproverare Pitagora per avere disconosciuto che « la géométrie n'est point une science piusée dans la nature; elle est née et elle n'existe que dans l'esprit humain ». (*Histoire de l'astronomie ancienne*, Paris MDDLXXV, p. 216), nel 1844 Grasmann recisamente affermava che « die Geometrie keinesweges in dem Sinn wie die Arithmetik oder die Kombinationslehre als ein Zweig der Mathematik anzusehen sei » (*Die Ausdehnungslehre von 1844*, II Aufl., Leipzig 1878, p. VII). E queste due affermazioni opposte possono considerarsi come i poli attorno ai quali si aggirano le discussioni sui fondamenti della geometria; però si può ritenere che la prima di esse trovi oggi pochissimi aderenti, giacchè l'idea che la geometria sia una scienza sperimentale è accettata quasi universalmente. Ma oltre a questo punto fondamentale, altri secondarî restano da chiarire ed il libro del Russel, non solo ne dà notizia, ma sparge non poca luce sopra di essi; a quanto egli dice noi non opponiamo serie obbiezioni, ma vogliamo esporre qualche osservazione sopra certi particolari.

Tacendo del fatto che noi facciamo molte riserve sulla affermazione che Bolyai e Lobatschewsky altro non abbian fatto che svolgere idee di Gauss (1), osserveremo che, seguendo il suggerimento di Klein, l'autore distingue tre periodi nella storia della geometria non euclidea: sono i corifei del primo Legendre, Gauss, Lobatschewsky e Bolyai, nel secondo emergono Riemann, Helmholtz e Beltrami e nel terzo Cayley e Klein; ora non sembra che un quarto sia stato di recente determinato dai lavori del Lie? ...

Benchè l'A. dimostri di possedere estesa coltura ed ottimi studi matematici, pure ci sembra che egli non abbia abbastanza assimilato i metodi di Staudt e non abbia sufficientemente meditato sul *Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea* del Beltrami. Infatti chi si sia completamente impadronito delle idee esposte nella *Geometrie der Lage*, non scrive che la geometria projettiva è *incapace* di distinguere l'una dalle altre le tre specie di coniche (2), ben sapendo

(1) « A bolder method, suggested by Gauss, was carried out by Lobatschewsky and Bolyai » (Russel, p. 8).

(2) « Thus it (cioè the projective Geometry) is unable to distinguish between different hindes of conics, though their distinction is of fundamental importance in many departments of knowledge » (p. 147).

Digitized by Google

che dal punto di vista projettivo tale distinzione *non esiste;* e chi conosce a fondo il bellissimo lavoro del Beltrami sa che esso porge una ingegnosissima interpretazione della geometria non-euclidea fondata sull'ordinaria geometria, ma non può nè deve prendere posto accanto a quegli scritti che si propongono un *instauratio ab imis fundamentis* di tutto l'edificio geometrico: è questa una circostanza su cui un geometra filosofo ha l'imprescindibile dovere di fissare l'attenzione dei propri lettori. Nè è a tacersi che se l'A. avesse preso cognizione degli studî di recente fatti in Italia sulle proposizioni fondamentali della geometria projettiva (cfr. l'articolo del Prof. Segre inserito a pag. 10-14), avrebbe potuto portare la 1.ª Sezione del suo III Cap. più prossima al livello attuale delle nostre cognizioni.

Osserverò finendo che il concetto degli esseri a due dimensioni che l'A., come si fa generalmente, attribuisce al Helmholtz, appartiene invece ad Eisenstein, come mostra il seguente interessantissimo passo di un'opera di P. du Bois-Reymond che io qui riferisco per diffonderne la conoscenza: « Io fui in rapporti di amicizia col matematico Eisenstein negli ultimi anni della sua breve esistenza, ed egli una volta mi disse che, pensando alla sua prossima fine, era tormentato dall'idea dell'infinito. Lo soccorreva però la considerazione seguente. S'immagini sopra una superficie sferica un « essere ombrale », cioè un essere esteso soltanto sopra una superficie, ma senza spessore, dotato però della facoltà di pensare, egli esisterebbe nello spazio a tre dimensioni, ma senza aver cognizione che di due. E quando egli si movesse, avrebbe l'impressione di spostarsi in un piano, poichè la sua struttura rimarrebbe sempre la medesima. E supponendo che egli si muovesse indefinitamente lungo una retta del piano immaginato, egli finirebbe del pari per ritornare al punto di partenza. Per conseguenza, quand'anche egli possedesse il concetto dell'« illimitato », come abbiamo noi, ciò sarebbe per lui illusione. In modo assolutamente analogo potrebb'essere prodotto di un'illusione in noi, *primo* il credere che esistiamo in uno spazio a tre sole dimensioni, *secondo* il pensare di poterci allontanare sopra una retta sino all'infinito » (1).

G. L.

M. Simon. — *Analytische Geometrie der Ebene.* — Mit 45 Abbildungen, Leipzig, Goschen 1897, 8.° picc. p. 203.

Questo manuale fa parte della piccola Collezione Goschen di opere letterarie e scientifiche (ogni manuale elegantemente rilegato non costa

(1) *Ueber die Grundlagen der Erkenntniss in der exacten Wisschaften* (Tübingen, 1890, p. 123).

Digitized by Google

che 80 Pf.) ed è degno di prendere posto accanto ai suoi fratelli maggiori. L'A., di cui è notoria la competenza ed abilità didattica, ha saputo sfruttare assai bene lo spazio che gli era concesso; senza mai scostarsi dal rigore, senza mai perdere di vista la chiarezza, e introducendo i moderni modi di vedere, egli è riuscito in 14 capitoli a insegnare i rudimenti della geometria analitica, illustrandone le leggi fondamentali, non soltanto sulle coniche, ma eziandio su quattro notevoli curve, cioè la cissoide, la curva di Cassini, la spirale di Archimede e la cicloide. Basti tal cenno a raccomandare il libretto del Prof. Simon all'attenzione di insegnanti e studenti; i primi troveranno anche delle innovazioni in certi particolari (trattazione completa della cissoide, senza adoperare il calcolo differenziale; nuova costruzione della tangente della curva di Cassini; ecc.), sui quali la tirannia dello spazio non concede di estendersi. G. L.

H. JANUSCHKE. — *Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre.* — Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Texte. Leipzig, Teubner, 1897, 8.° gr. p. X + 455.

Introduzione. — Oggetto e metodi della fisica; il principio della conservazione dell'energia. Cap. I. Moto di corpi solidi. II. Equilibrio e moto dei fluidi. III. Equilibrio e moto dei gas. IV. Forze molecolari. V. Calore. VI. Elettricità. Elettrostatica. VII. Magnetismo. VIII. Fiumi elettrici. IX. Elettromagnetismo. X. Induzione voltaica e magnetica. XI. Luce.

Annuaire pour l'année 1898, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. — Paris, Gauthier-Villers. 16.°

Il « Bureau des Longitudes », creato dalla Convenzione nazionale con legge 25 Giugno 1795, annovera tra i suoi obblighi « la pubblicazione di un annuario atto a regolare quelli di tutta la Repubblica ». A questo còmpito esso non è mai venuto meno; e chi potrebbe misurare i servigi che l'Annuario dell'Ufficio delle longitudini, nel secolo di vita che conta, ha prestato a tutti quelli che si occupano di ricerche sperimentali sulla filosofia naturale?

Il nuovo volume ora apparso, oltre alle consuete rubriche relative alla cronologia, all'astronomia, alla geodesia, alla metrologia, alla geografia ed alla statistica, contiene un resoconto dei Sig.ri Loewy e Puiseux *Sopra alcuni recenti progressi compiuti mediante la fotografia nello studio della superficie della luna* ed uno del Janssen *Sui lavori eseguiti nell'Osservatorio del Monte Bianco;* inoltre un

Digitized by Google

articolo *Sopra la stabilità del sistema solare*, ove il Sig. Poincaré coll'usata lucidità e ben nota competenza espone come e perchè oggi non si possa prestare assoluta fede al celebre teorema con cui Lagrange (e tanti altri dopo di lui) credette di tranquillizzare i mortali sulla solidità dell'edificio celeste. Una *Notice sur l'œuvre scientifique de H. Fizeau* di A. Cournfa sistema coll'altra sopra Fresnel inserta nell'Annuario del 1896. Chiudono l'Annuario i discorsi tenuti addì 25 Gennaio 1897 dai Sig.ri Janssen e Loewy nella festa commemorativa del 50.° anniversario dell'ingresso del Faye all'Istituto di Francia. G. L.

Ing. Edoardo Webber. — *Applicazioni geometriche e analitiche di calcolo differenziale e integrale.* — Milano, Rechiedei, 1895, VI-263 p. 8.°

Sfogliando il libro che ci sta davanti, ci si presenta anzitutto una domanda: Per qual ragione l'autore l'ha intitolato *applicazioni geometriche e analitiche*, mentre di queste ultime non c'è neppur la traccia? — Un'altra e più seria domanda saremmo tentati a rivolgerci, e cioè per qual motivo l'autore si sia indotto a scrivere questo volume. Ed invero esso nulla affatto contiene di nuovo; nulla che già non si trovi in tutti i testi, o che non possa essere riprodotto colla guida delle teorie più elementari da qualunque mediocre studente delle nostre Facoltà matematiche. Non novità di metodi, che sono informati a quelle idee le quali fortunatamente hanno cessato di dominare da un quarto di secolo; basti citare ad esempio, fra tanti altri, la dimostrazione della formola $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (p. 68). Non esattezza di linguaggio, se esatte non possono chiamarsi queste espressioni: *la formola della normale* per *l'equazione* (p. 21); il *valore della tangente* per *l'equazione* (p. 21); *curva polare* per *curva rappresentata da un'equazione in coordinate polari* (p. 43); *equazione* d'una linea nello spazio per *equazioni* (p. 145, 146, 147, 152, 154); ecc. — Di nuovo c'è, purtroppo, qualche strano risultato; e più ce ne sarebbero, se l'autore avesse tratto tutte le conseguenze delle sue premesse. Diamo qualche saggio.

« Dicesi $\overset{\text{concava}}{\text{convessa}}$ rispetto ad un suo punto quella curva che è posta tutta al $\overset{\text{disopra}}{\text{disotto}}$ (?!) della tangente in quel punto » (p. 52). P. es. della parabola è convessa la parte superiore all'asse, concava l'inferiore (p. 61), e analogamente per le altre coniche (p. 59, 60). « Il punto M nel quale la curva da concava diventa convessa dicesi *flesso* ... e la tangente in esso sega la curva » (p. 57). Dunque il vertice della parabola sarebbe un flesso, e in esso la curva sarebbe segata dalla tangente.

Digitized by Google

« L'angolo di torsione ha la stessa misura dell'angolo di flessione » (p. 181). Ne segue che non v'ha altra curva piana oltre la retta.

A p. 210-212 si determina con un lungo calcolo l'area della lemniscata; però ad un certo punto comparisce un errore di segno che rende il risultato inesatto. Ma fosse soltanto inesatto! Il nostro autore trova $A = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$, cioè un'area negativa. Povero Bernoulli, t'hanno messo in fallimento!

E ci pare che basti. G. VIVANTI.

Das delische Problem. Von Prof. AMBROS STURM. — Lins, 1895, 1896, 1897. 8.° gr. pag. 140.

Il problema della duplicazione del cubo, che fece consumare tanto fosforo agli antichi, i quali pretendevano risolverlo *regula et circini*, ha già trovati due storici: uno è il Reimer che ad esso dedicò l'importante lavoro intitolato *Historia problematis de cubi duplicatione, sive inveniendis duabus mediis continuae proportionalibus inter duas datas* (Gottingae, 1798), l'altro è il Montucla che dello stesso ha trattato in un'appendice alla sua *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (I ed. Paris, 1754, II ed. Paris, 1831). L'uno e l'altro di questi dotti ha esposte con sufficiente larghezza soluzioni suggerite dai geometri greci, ma si limitò a indicare appena le indagini fatte sul problema di Delo dopo il Rinascimento: per tale lacuna ed anche perchè le ottime edizioni critiche che oggi possediamo dei matematici greci rendono più sicure le argomentazioni fondate sull'esame dei testi, era naturale il proporsi di descrivere nuovamente le vicende di quell'importante problema. Gli è quello che tentò e fece il prof. A. Sturm col lavoro che annunciamo: del quale la I parte concerne la *Trattazione del problema al tempo di Platone*, la II la *Trattazione del problema nell'epoca Alessandrina* e la III la *Trattazione del problema per opera degli Indiani, degli Arabi e dei popoli cristioni del Mezzogiorno sino a Decartes e Newton*. Nella I parte l'A., dopo avere narrata l'origine favolosa del problema e la sostituzione di esso con quello dell'inserzione di due medie proporzionali tra due rette date, espone le soluzioni di Archita, Eudosso, Menecmo e Platone; nella II quelle di Eratostene, Apollonio (coincidente con quelle di Pappo e Sporo), nonchè una soluzione approssimata che Pappo ha conservata nella sua *Collezione matematica;* nell'ultima parte poi ci dà notizie di alcuni problemi analoghi a quello di Delo che s'incontrano nella letteratura indiana e nella giapponese, delle ricerche fatte su di esso nel Rinascimento, e da ultimo dei modi con cui esso venne considerato nel secolo XVII. Quando avremo aggiunto

Digitized by Google

articolo *Sopra la stabilità del sistema solare*, ove il Sig. Poincaré coll' usata lucidità e ben nota competenza espone come e perchè oggi non si possa prestare assoluta fede al celebre teorema con cui Lagrange (e tanti altri dopo di lui) credette di tranquillizzare i mortali sulla solidità dell' edificio celeste. Una *Notice sur l'œuvre scientifique de H. Fizeau* di A. Cournfa sistema coll' altra sopra Fresnel inserta nell' Annuario del 1896. Chiudono l'Annuario i discorsi tenuti addì 25 Gennaio 1897 dai Sig.ri Janssen e Loewy nella festa commemorativa del 50.° anniversario dell' ingresso del Faye all' Istituto di Francia. G. L.

Ing. Edoardo Webber. — *Applicazioni geometriche e analitiche di calcolo differenziale e integrale.* — Milano, Rechiedei, 1895, VI-263 p. 8.°

Sfogliando il libro che ci sta davanti, ci si presenta anzitutto una domanda: Per qual ragione l'autore l'ha intitolato *applicazioni geometriche e analitiche*, mentre di queste ultime non c'è neppur la traccia? — Un'altra e più seria domanda saremmo tentati a rivolgerci, e cioè per qual motivo l'autore si sia indotto a scrivere questo volume. Ed invero esso nulla affatto contiene di nuovo; nulla che già non si trovi in tutti i testi, o che non possa essere riprodotto colla guida delle teorie più elementari da qualunque mediocre studente delle nostre Facoltà matematiche. Non novità di metodi, che sono informati a quelle idee le quali fortunatamente hanno cessato di dominare da un quarto di secolo; basti citare ad esempio, fra tanti altri, la dimostrazione della formola $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (p. 68). Non esattezza di linguaggio, se esatte non possono chiamarsi queste espressioni: *la formola della normale* per *l'equazione* (p. 21); il *valore della tangente* per *l'equazione* (p. 21); *curva polare* per *curva rappresentata da un' equazione in coordinate polari* (p. 43); *equazione* d' una linea nello spazio per *equazioni* (p. 145, 146, 147, 152, 154); ecc. — Di nuovo c'è, purtroppo, qualche strano risultato; e più ce ne sarebbero, se l' autore avesse tratto tutte le conseguenze delle sue premesse. Diamo qualche saggio.

« Dicesi $\overset{\text{concava}}{\text{convessa}}$ rispetto ad un suo punto quella curva che è posta tutta al $\overset{\text{disopra}}{\text{disotto}}$ (?!) della tangente in quel punto » (p. 52). P. es. della parabola è convessa la parte superiore all'asse, concava l'inferiore (p. 61), e analogamente per le altre coniche (p. 59, 60). « Il punto M nel quale la curva da concava diventa convessa dicesi *flesso* ... e la tangente in esso sega la curva » (p. 57). Dunque il vertice della parabola sarebbe un flesso, e in esso la curva sarebbe segata dalla tangente.

Digitized by Google

« L'angolo di torsione ha la stessa misura dell'angolo di flessione » (p. 181). Ne segue che non v'ha altra curva piana oltre la retta.

A p. 210-212 si determina con un lungo calcolo l'area della lemniscata; però ad un certo punto comparisce un errore di segno che rende il risultato inesatto. Ma fosse soltanto inesatto! Il nostro autore trova $A = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$, cioè un'area negativa. Povero Bernoulli, t'hanno messo in fallimento!

E ci pare che basti. G. VIVANTI.

Das delische Problem. Von Prof. AMBROS STURM. — Lins, 1895, 1896, 1897. 8.° gr. pag. 140.

Il problema della duplicazione del cubo, che fece consumare tanto fosforo agli antichi, i quali pretendevano risolverlo *regula et circini*, ha già trovati due storici: uno è il Reimer che ad esso dedicò l'importante lavoro intitolato *Historia problematis de cubi duplicatione, sive inveniendis duabus mediis continuae proportionalibus inter duas datas* (Gottingae, 1798), l'altro è il Montucla che dello stesso ha trattato in un'appendice alla sua *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (I ed. Paris, 1754, II ed. Paris, 1831). L'uno e l'altro di questi dotti ha esposte con sufficiente larghezza soluzioni suggerite dai geometri greci, ma si limitò a indicare appena le indagini fatte sul problema di Delo dopo il Rinascimento: per tale lacuna ed anche perchè le ottime edizioni critiche che oggi possediamo dei matematici greci rendono più sicure le argomentazioni fondate sull'esame dei testi, era naturale il proporsi di descrivere nuovamente le vicende di quell'importante problema. Gli è quello che tentò e fece il prof. A. Sturm col lavoro che annunciamo: del quale la I parte concerne la *Trattazione del problema al tempo di Platone*, la II la *Trattazione del problema nell'epoca Alessandrina* e la III la *Trattazione del problema per opera degli Indiani, degli Arabi e dei popoli cristiani del Mezzogiorno sino a Decartes e Newton*. Nella I parte l'A., dopo avere narrata l'origine favolosa del problema e la sostituzione di esso con quello dell'inserzione di due medie proporzionali tra due rette date, espone le soluzioni di Archita, Eudosso, Menecmo e Platone; nella II quelle di Eratostene, Apollonio (coincidente con quelle di Pappo e Sporo), nonchè una soluzione approssimata che Pappo ha conservata nella sua *Collezione matematica;* nell'ultima parte poi ci dà notizie di alcuni problemi analoghi a quello di Delo che s'incontrano nella letteratura indiana e nella giapponese, delle ricerche fatte su di esso nel Rinascimento, e da ultimo dei modi con cui esso venne considerato nel secolo XVII. Quando avremo aggiunto

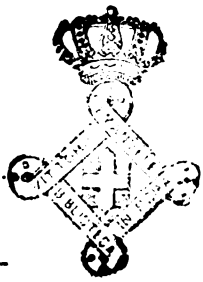
Digitized by Google

che il sig. Sturm si mostra pienamente in possesso del suo argomento e sa di quando in quando inserire qualche osservazione originale, avremo detto al lettore il perchè noi riteniamo che il lavoro in discorso meriti l'attenzione degli storici ed inoltre possa servire come ottimo preliminare storico alla I Parte delle ben note *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare* del prof. F. Klein.

G. L.

Digitized by Google

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI



UNIVERSITÀ DI PAVIA - CORSO DI FISICA MATEMATICA - ANNO 1895-96.

I. *Principii generali delle deformazioni elastiche.*

Rappresentazione delle deformazioni. - Componenti di spostamento. - Deformazione omogenea. - Componenti di deformazione. - Cono di scorrimento. - Rette principali. - Variazione del coefficiente di dilatazione lineare intorno ad un punto. - Invarianti di deformazione. - Deformazione d'una particella. - Componenti di rotazione elementare. - Scorrimenti. - Dilatazione cubica. - Condizioni di rigidità. - Le sei equazioni a derivate parziali cui soddisfano le componenti di deformazione.

II. *Potenziale di elasticità.*

Definizione del potenziale di elasticità. - Formole per la trasformazione delle componenti di deformazione. - Condizioni per l'esistenza d'un asse di simmetria. - Asse di isotropia. - Forme del potenziale quando esiste un asse di periodo, due, tre, quattro, sei. - Legge di razionalità degli indici. - Gruppi di operazioni che caratterizzano la simmetria. - Operazioni di 1.ª e di 2.ª specie. - Le nove forme del potenziale pei corpi cristallini. - Potenziale isotropo.

III. *Equazioni del movimento ed equilibrio dei corpi elastici.*

Equazioni indefinite del movimento e dell'equilibrio dei corpi elastici. - Equazioni al contorno. - Unicità della soluzione del problema dell'equilibrio. - Caso dei corpi isotropi. - Proprietà del potenziale dei corpi isotropi. - Condizioni cui devono soddisfare le costanti.

IV. *Distribuzione delle pressioni nell'interno d'un corpo elastico.*

Definizione della pressione. - Pressione nell'interno. - Deduzione delle equazioni d'equilibrio. - Distribuzione delle pressioni nell'interno d'un corpo elastico. - Elisoide d'elasticità. - Relazioni fra le pressioni e le componenti di deformazione. - Teoria dell'elasticità di Navier e Poisson.

V. *Movimenti oscillatori nei corpi di dimensioni finite.*

Forma generale degli integrali dell'equazione dei movimenti oscillatori. - Determinazione dei coefficienti indeterminati delle serie integrali mediante le condizioni iniziali. - Applicazioni all'acustica. -

Digitized by Google

Dimostrazione di Poincaré dell'esistenza delle radici dell'equazione che determina i periodi di oscillazione. - Vibrazioni lungitudinali della sfera. - Metodo di Clebsch per l'integrazione delle equazioni. - Esempi di vibrazioni longitudinali e trasversali. - Problema della dispersione delle vibrazioni nell'aria. - Integrale generale dell'equazione delle corde vibranti.

VI. *Movimenti oscillatori nei mezzi isotropi indefiniti.*

Decomposizione del movimento generale vibratorio in un mezzo isotropo indefinito in movimento lungitudinale e trasversale. - Onde piane lungitudinali e trasversali. - Polarizzazione. - Interferenza delle onde piane longitudinali e trasversali. - Polarizzazione ellittica e circolare. - Onde sferiche. - Punti luminosi. - Interferenza di due sistemi di onde sferiche. - Esperienza di Fresnel. - Onde stazionarie. - Formola di Poisson per l'integrazione dell'equazione $\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \Delta_2 u$, date le condizioni iniziali. - Propagazione di un'onda isolata.

VII. *Movimenti oscillatori per onde piane nei mezzi anisotropi.*

Possibilità di un movimento vibratorio per onde piane in un mezzo anisotropo generale. - Differenti velocità di propagazione. - Condizione per l'esistenza di un sistema di onde longitudinali. - Mezzo di Green e sue proprietà. - Leggi della doppia rifrazione di Fresnel. - Equazione della velocità. - Assi ottici. - Mezzi uniassici. - Onda ordinaria e onda straordinaria. - Costruzione geometrica dei piani di polarizzazione. - Equazioni generali dei movimenti vibratori nel mezzo di Green.

VIII. *Teoria dei raggi luminosi nei mezzi anisotropi.*

Definizione generale di raggio in un mezzo anisotropo. - Equazioni che ne determinano la direzione in un mezzo di Green - Velocità di propagazione del raggio. - Proprietà fondamentali della superficie d'onda. - Cerchi di contatto. - Angolo fra un asse ottico e un asse dei raggi. - Rifrazione conica. - Riflessione e rifrazione ai limiti di due mezzi cristallini. - Condizioni sufficienti a determinare la direzione dei raggi riflessi e rifratti. - Soluzione geometrica mediante la superficie d'onda del problema della riflessione e della rifrazione. - Rifrazione conica interna ed esterna. - Soluzione analitica del problema della riflessione e rifrazione per quanto riguarda la direzione dei raggi.

IX. *Teoria generale dell'equilibrio dei corpi elastici.*

Teorema di Betti. - Metodo generale di integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico. - Applicazione al caso della sfera isotropa. - Determinazione della dilatazione totale d'un corpo. - Deformazione

Digitized by Google

per azione della gravità. - Forma generale degli integrali nel caso dei corpi isotropi. - Soluzioni caratteristiche. - Formole di rappresentazione delle componenti di spostamento. - Metodo d'integrazione che ne deriva. - Determinazione della terna di funzioni generatrici corrispondenti alle formole generali di rappresentazione. - Formole di Betti per la dilatazione e le componenti della rotazione elementare.

X. *Rappresentazione di un campo di forza per mezzo di forze elastiche.*

Estensione delle formole di rappresentazione degli spostamenti al caso di uno spazio indefinito. - Formole di Maxwell per la rappresentazione di un campo di forza elettrostatico. - Proprietà delle pressioni rispetto alle linee di forza. - Soluzione generale del problema di Maxwell per un campo di forza qualunque.

C. SOMIGLIANA.

Digitized by Google

NECROLOGIO

ERNESTO CRISTIANO GIULIO SCHERING (1)

Ernesto Schering nacque il 13 Luglio 1833 nella casa forestale Sandbergen vicino a Bleckede sull' Elba (Prov. di Hannover). Dal 1845 al 1850 frequentò la Scuola Reale di Lüneburg, mostrando ivi delle speciali attitudini per le matematiche (2). Coll'idea di dedicarsi alla ingegneria egli studiò poi, cioè dall'Autunno 1850 all'Autunno 1852, nel Politecnico di Hannover. Ma nel frattempo le sue intenzioni mutarono ed egli decise di dedicarsi in particolar modo alla Matematica ed alla Fisica. A tale scopo, a partire dall'Autunno 1852, egli frequentò l'Università di Gottinga, ove ascoltò le lezioni di Gauss, G. Weber e Dirichlet: l'influenza che da essi subì è tale che si può dire egli rimase sempre loro discepolo. — Nel 1856, per effetto delle lezioni di Dirichlet, egli giunse ad una nuova soluzione del problema concernente il moto di un fluido non elastico ed indefinito ove sta un ellissoide (v. Bjerknes, in Götting. Nachr., 1873, p. 439). Poco dopo (22 Luglio 1857) ottenne la laurea dottorale « propter egregiam matheseos et physices scientiam » in base ad un lavoro *Sulla teoria dei fiumi elettrici* (v. n. 1 dell'*Elenco* che chiude questi Cenni) premiato dall' Università di Gottinga; ed in base ad un secondo lavoro premiato dalla stessa Università (n. 2 dell'*Elenco*) gli fu concessa nell' Estate 1858 la « venia docendi »: così la carriera accademica eragli aperta!

Addì 18 Febbraio 1860 fu nominato Assessore della Classe matematica della Società delle Scienze di Gottinga ed il 1.° Novembre 1862 Membro della stessa. In conseguenza della elezione a Professore straordinario, che ebbe il 24 Febbrajo 1860 dall' Università di Giessen, gli venne concesso il posto analogo nell' Università di Gottinga (23 Marzo 1860). Circa in quest' epoca egli, per incarico della Società di Gottinga diede mano alla edizione delle opere complete di Gauss e le compì nel 1874; i sette poderosi volumi che le compongono (l'ultimo dei quali contiene la « Theoria motus corporum celestium ») portano

(1) I cenni seguenti vennero composti mediante le informazioni gentilmente somministrate dal Prof. K. Schering, fratello dell' illustre estinto. G. L.

(2) Il suo professore di matematica soleva più tardi ricordare che Schering, da studente, scoperse un teorema generale sugli sviluppi in frazione continua.

Digitized by Google

le date 1863, 1863, 1866, 1873, 1867, 1874 e 1871 (1). Come appendice sta la nota *Carl Friedrich Gauss: De integratione formulae differentialis* $(1 + n \cos \varphi)^{\nu} d\varphi$, dallo Schering pubblicata nelle Göttinger Nachrichten, 1893, p. 617-646.

Il 6 Giugno 1868 fu promosso professore ordinario di Matematica ed in pari tempo nominato direttore nella II Sezione dell'Osservatorio astronomico. La sua opera di direttore delle osservazioni sul magnetismo terrestre vien giudicata dai competenti in materia della massima importanza. Nè minor valore possiede la sua azione di insegnante, chè le sue lezioni erano efficaci e varie di argomento (basti ricordare infatti che esse ebbero come argomenti le funzioni ellittiche ed abeliane, l'algebra superiore, la teoria dei numeri, la meccanica, la teoria del potenziale e l'idrodinamica). Non è il caso poi di vantare i suoi meriti come editore delle opere di Gauss: essi basterebbero da soli a assicurare a Schering la gratitudine e venerazione della posterità più remota. Nè va taciuto che durante tutta la sua vita egli fu occupato da investigazioni scientifiche i cui risultati sono consegnati nelle memorie da lui pubblicate (gli anni 1870-1887 rappresentano il periodo di attività massima) e di cui più innanzi trovasi la enumerazione completa (2).

Membro di varie accademie (3) e cavaliere di varî ordini, marito (4) e padre felice, a lui vennero concessi gli elementi a cui sembra legata la felicità di uno scienziato: cioè la giusta estimazione delle proprie opere e la pace del focolare domestico. Ma la felicità non è di lunga durata quaggiù: e gli amici ed i parenti dello Schering da parecchî anni notarono con ispavento i progressi di un male che, senza produrgli gravi sofferenze, ne diminuiva le forze e ne minava l'esistenza. Sicchè più dolore che meraviglia si provò apprendendo che la sua vita si era spenta dolcemente addì 2 Novembre 1897. Lo stuolo di parenti ed amici, di colleghi ed antichi discepoli, che piangendo accompagnarono all'ultima dimora la salma di Ernesto Schering, dimostrò ad evidenza che in lui le doti del cuore e del carattere erano pari all'altezza dell'ingegno.

---

(1) Dei primi quattro esistono ristampe datate risp. 1870, 1876, 1876, 1880.

(2) Fra questi lavori otto sono di aritmetica (n. 3, 4, 6, 14, 18, 19, 20, 28), cinque di meccanica e fisica matematica (n. 1, 9, 11, 12, 13), cinque di algebra ed analisi (n. 8, 17, 22, 23, 26), quattro di fisica (n. 29-32) e tre di geometria (n. 2, 7, 10). Gli altri sono biografici o bibliografici. Va notato che dall'*Elenco* esclude il *Briefwechsel zwischen G. Lejeune-Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker* pubblicato dallo Schering nelle Göttinger Nachrichten 1885.

(3) Appartenne anche per molti anni alla Commissione per la misura del Grado.

(4) Il 29 Ottobre 1876 egli avea sposato la figlia del matematico svedese Malmsten.

Digitized by Google

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI E. C. J. SCHERING

1. Zur mathematischen Theorie electrischer Ströme. Beweis der allgemeinen Lehrsätze der Electrodynamik insbesondere der Inductionslehre aus dem electrischen Grundgesetze. Eine von der phil. Facultät der Georgia Augusta am 13 Juni 1857 gekrönte Preisschrift. (Göttingen, 1857. Un sunto si trova nel T. CIV degli Annali del Poggendorff).

2. Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Eine von der phil. Facultät der Georgia Augusta aus 4 Juni 1858 gekrönte Preisschrift. (Göttingen, 1858).

3. Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres (Giornale di Lionville, II serie, T. IV, 1859).

4. Zahlentheoretische Bemerkung (datata 14 maggio 1863, ma pubblicata nel 1887 nel T. C del Giornale di Crelle).

5. Bernhard Riemann zum Gedächtniss (Götting. Nachrichten 1867).

6. Die Fundamental-Classen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. (Götting. Abhandlungen, T. XIV, 1869).

7. Erweiterung des Gauss'schen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümenten Flächen (Götting. Nachrichten 1868).

8. Mittheilungen über den III.ten Band von Gauss' Werken (Mathem. Annalen, T. I, 1869).

9. Die Schwerkraft im Gaussischen Raume (Id. 1870).

10. Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen. (Id. 1873).

11. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. (Id. 1873).

12. Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maas von der Bewegung der Körper abhängt (Götting. Abhandlungen, T. XVIII, 1873).

13. Verallgemeinerung der Poisson-Jacobischen Störungsformeln (Id., T. XIX, 1874).

14. Verallgemeinerung des Gaussischen Criteriums für den quadratischen Rest-Character einer Zahl in Bezug auf eine andere (Berliner Monatsberichte, 1876).

15. Zur Feier der hundersten Wiederkehr von Gauss Geburtstage: 1877 April 30 (Götting. Nachrichten, 1877).

16. Carl Friedrich Gauss' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr. (Götting. Abhandlungen, T. XXII, 1877; trad. italiana in Annali di Matematica, II Serie. T. IX, 1879).

17. Analytische Theorie der Determinanten (Götting. Abhandlungen, T. XXII, 1877; un sunto di questa memoria trovasi nel T. LXXXVI, 1878, dei Comptes rendus di Parigi).

18. Neuer Beweis des Reciprocitäts-Satzes für die quadratischen Reste (Götting. Nachrichten, 1879; v. anche Comptes-rendus, T. LXXXVIII, 1889).

19. Bestimmung des quadratischen Rest-Characters (Götting. Abhandung. T. XXIV, 1879).

Digitized by Google

20. Bemerkung über Gauss' Brief vom 20 April 1807 an Sophie Germain (Götting. Nachrichten, 1879).

21. Geschenk für die Gauss-Bibliothek von Boncompagni (Id. 1880).

22. Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen (Götting. Abhandlungen, T. XXVII, 1881).

23. La formule d'interpolation de M. Hermite emprimée algébriquement (Comptes-rendus, T. XCII, 1881).

24. Anzeige vom: Onnes, Nieuwe Bewyzen voor de Asweuteling der Aarde (Götting. gelehrte Auzeigen, Gennajo 1883).

25. Todes-Anzeige von Prof. Dr. Klinkerfues (Astr. Nachrichten, n. 2573, 1884).

26. Zür Lösung der Keppler'schen Gleichung (Götting. Nachrichten 1884 e Astr. Nachrichten n.° 2605, 1884).

27. Ueber die von Mittag-Leffler herausgegebenen « Acta Mathematica » (Götting. Nachrichten, 1884).

28. Zum dritten Gauss'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste (Berliner Monatsberichte, 1885).

29. (assieme a K. Schering) Beobachtung im Gauss' erdmagnetischen Observatorium während der Polarexpedition 1882 und 1883 (fa parte del I vol. dell' opera: Die internationale Polarforschung 1882-1883, Berlin 1886. Cfr. una conferenza tenuta dallo Schering e pubblicata in Elektrotechnische Zeitschrift, 1887).

30. Carl Friedrich Gauss und die Erforschung des Erdmagnetisums (Götting. Abhandlungen, T. XXXIV, 1887).

31. Sur les inclinomètres à induction (Comptes-rendus, 1891).

32. Ueber die Bestimmung der Inclination mit dem Erdinductor. (Electrotechnische Zeitschrift, 1891).

Digitized by Google

NOTIZIE

La biblioteca Boncompagni. — « Nel giorno 27 del corrente mese avrà principio in Roma l'asta pubblica per la vendita, alla spicciolata, delle opere che formano parte della magnifica biblioteca Boncompagni.

Il primo fascicolo, ora pubblicato, del catalogo a stampa (*Roma, Palazzo Cenci*, 1898, p. 200, in 8.°), contiene lo elenco di 501 codici preziosissimi; di 700 copie e *fac-simili* di manoscritti rarissimi, in massima parte attinenti alle scienze matematiche e fisiche; di 178 edizioni quattrocentine, fra le quali parecchi veri incunabili; di 452 libri stampati di Abbaco e di Arimmetica, non pochi dei quali di massima rarità; e 207 fra collezioni di Memorie accademiche e Riviste scientifiche e letterarie.

La è, come apparisce da questo 1.° fascicolo, la più grande e preziosa raccolta privata che esista, di opere matematiche; la quale formata in un mezzo secolo di continui studii, di operose indagini e d'ingenti spese, dal Principe Baldassare Boncompagni, ora probabilmente andrà dispersa in tutte le parti del mondo.

È di sconforto che tanta somma di lavoro vada perduta. È deplorevole che il Municipio di Roma rifiutasse, per un capriccio edilizio, la generosa offerta del Boncompagni, di cedergli la di lui biblioteca. È indecoroso che nè il Governo, nè alcun istituto nazionale non ne faccia l'acquisto e non conservi codesto tesoro alla patria. Imperocchè se riesce di tanta jattura la dispersione delle più rare opere che compongono quella biblioteca, il suo smembramento come collezione che mai più sarà possibile di ricostituire, è un delitto contro il patrimonio scientifico della nazione. R. ».

A queste nobili parole, che scrisse in *Il Panaro* di Modena dell' 8 Gennaio 1898 uno de' più reputati bibliografi italiani, faranno eco tutti coloro a cui sta a cuore l'onore dell'Italia, a cui preme la matematica e la sua storia. Sappiasi almeno all'estero che se avrà luogo la temuta dispersione della raccolta Boncompagni, succederà malgrado i reiterati sforzi di illustri scienziati, ai quali, se non altro, rimarrà il non piccolo merito di avere impedito che *tutti* gli scritti adunati dall'intelligente operosità del munifico Principe raggiungano i capilavori dell'arte nostra che abbellano i Musei e le Pinacoteche dei paesi oltramontani; è qualcosa..., ma non abbastanza.

***

Il I premio Lobatscheffsky. — Il primo dei premi periodici istituiti dalla Società fisico-matematica di Kasan per onorare la memoria di Lobatscheffsky, venne di recente conferito a S. Lie pei contributi da lui arrecati alla geometria non-euclidea applicando ad essa la teoria dei gruppi di trasformazioni (*Theorie der Transformationsgruppen* T. III). Vennero poi conferite menzioni onorevoli agli autori delle opere seguenti: Gérard, *Thèse sur la géométrie non-euclidienne;* Cesàro, *Lezioni di geometria intrinseca;* Fontenè, *L'hyperspace à* n-1 *dimensions.* Sull'esito del concorso ebbe grande influenza una relazione intorno all'opera del Lie scritta per

Digitized by Google

incarico della detta Società e che venne ora pubblicata sotto il titolo: *Zur ersten Verteilung des Lobatschewsky - Preises (3 November 1897). Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie, erstattet durch Felix Klein* (Kasan, 1897): è un opuscolo pieno di osservazioni interessanti, di idee originali e di considerazioni suggestive su cui richiamiamo l'attenzione dei lettori.

∴

La legge di Goldbach. — È noto che, in una lettera ad Eulero, il Goldbach ha esposta la osservazione che ogni numero pari $2n$ è rappresentabile (in un certo numero ν di modi) come somma di due numeri primi. Che tale proposizione (volgarmente conosciuta sotto il nome di *legge di Goldbach*) sia vera per $2n \leq 1000$ ha verificato G. Cantor con un lavoro che fu comunicato nel 1894 al Congresso di Caen dell' *Association française pour l'avancement de la science*, ove di più, per ogni numero, è determinato il numero ν delle decomposizioni. Che la legge di Goldbach valga fino al numero 10000 verrà dimostrato da un lavoro di R. Haussner che sta per essere inserito nei *Nova Acta der Leopoldinische Akademie*, ove di più il numero ν è determinato per tutti i numeri $2n \leq 50000$ e sono additate certe leggi che ne governano la successione di valori. Tali risultati, facendoci raggiungere la certezza morale, se non la certezza matematica, della verità della legge di Goldbach, rendono più giustificati i tentativi di dimostrarla e più vivo il desiderio che essi raggiungano il loro scopo.

∴

Le conferenze di Klein. — Il noto opuscolo di Klein sopra i tre più celebri problemi della geometria elementare, dopo avere avuta una traduzione italiana per opera del Prof. Giudice ed una francese del Prof. Griess, ne ebbe testè una terza in inglese dovuta ai professori W. W. Beman e D. E. Smith. È intitolata: *Famous problem of elementary geometry. The duplication of the cube. The trisection of an angle. The quadrature of the circle* (Boston and London, 1897).

∴

A proposito del saggio del Wessel. — La pubblicazione fatta per cura dell'Accademia Danese del *Saggio* del Wessel *sulla rappresentazione analitica* della direzione, diede occasione al sig. W. W. Beman di tenere nell'Agosto 1897 un discorso dinnanzi all'Associazione americana per l'avanzamento della scienza. Nel quale, sotto il titolo di *A Chapter in the history of mathematics*, è a larghi tratti indicato lo sviluppo della teoria degli immaginari da Erone e Bhaskara sino ai dì nostri. « Tali furono, disse l'autore finendo, i principi dello studio della rappresentazione degli immaginarî, che nei tempi moderni condusse a fondare dei grandi corpi di dottrine, quali sono la teoria delle funzioni da un lato ed i quaternioni dall'altro, coll'Ausdelmungslehre occupante una posizione intermedia. Chi può dire che cosa produrrà il prossimo secolo? »

∴

Digitized by Google

A. I. G. ossia M. A. — Tutti sanno che da 25 anni esiste in Inghilterra una Società intitolata *Association for the improvement of geometrical teaching* avente per iscopo di provocare e dirigere il moto in avanti dei metodi di insegnamento della geometria elementare. A partire dallo scorso anno tale sodalizio mutò nome ed or si chiama *Mathematical Association*; ma il suo scopo non è sostanzialmente mutato, benchè sia un po' ampliato: invece di limitare alla geometria il suo campo di azione, ora esso intende abbracciare la matematica tutta. L'organo ufficiale della Mathematical Association è *The mathematical Gazette* che ormai conta tre anni di vita. Ma inoltre, per raggiungere lo scopo prefissosi, i suoi membri si riuniscono ogni anno almeno una volta, non solo per discutere gl' interessi della compagnia, ma anche per trattare delle questioni scientifiche. Ecco ad esempio le letture annunciate per la riunione da tenersi a Londra addì 15 Gennaio 1898: E. M. Langley, Curiosità della divisione; W. J. Greensteat, Criteri di divisibilità ed altre note; H. W. London-Tanner, Una classe di finzioni algebriche; E. Budden, Dimostrazione elementare della possibilità di far passare una conica per cinque punti.

* * *

La Revue semestrielle. — La Società matematica di Amsterdam, sotto i cui auspici si pubblica la *Revue semestrielle des pubblications mathématiques*, ha fatto testè uscire per le stampe delle *Tables des matières contenues dans le cinq volumes 1893-1897, suivies d'une Table générale par noms d'auteurs*. Questo complemento a quell' ottimo periodico è diviso in quattro parti: elenco dei giornali (sono 172), indice per materie (la classificazione è fatta secondo i criteri adottati dalla Commissione internazione del Repertorio bibliografico), biografia, ed elenco degli autori. Esso rende la *Revue*, non soltanto uno strumento indispensabile per qualsia ricerca storica o bibliografica sulla matematica moderna, ma un prezioso ausiliare per qualunque investigatore che voglia accertarsi di non lavorare senza reale utilità, di non sforzarsi di risolvere questioni già sciolte o di scoprire verità già conosciute.

* * *

Per la biografia di Pietro Paoli. — *Alcune lettere di Lagrange, di Laplace e di Lacroix, dirette al matematico Pietro Paoli e sette lettere del Paoli al Prof. Paolo Ruffini* è il titolo di un recente scritto del Prof. Pietro Riccardi inserito nel Vol. I (3.ª Serie) delle Memorie della R. Accademia di Modena. Piuttosto che rendere più perfetta conoscenza della vita o delle opere dei grandi matematici francesi autori delle più attraenti fra tali lettere, esse valgono a gettare qualche luce sopra il Paoli e verranno indubbiamente sfruttate da chi in avvenire vorrà scrivere una particolareggiata biografia del celebre professore dell' Ateneo Pisano, còmpito questo che dalla Società dei XL venne in passato affidato al Prof. Geminiano Riccardi, ma che non fu portato a termine nè da lui nè da altri.

Mario Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1898.

Digitized by Google

Aprile, Maggio e Giugno 1898.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

A. Vassilief, *Pafnutii Lvovitch Tchébychef et son œuvre scientifique.* §§ I, II, III.

Recensioni ed annunzi: *Oeuvres de* Laguerre T. I [G. L.]. — W. Nernst und A. Schonflies. *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften* [P. Pizzetti]. — C. A. Laisant. *La mathématique* [G. L.]. — G. Vailati. *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca* [G. L.]. — H. Brocard. *Notes de bibliographie des courbes géométriques* [G. L.]. — E. Picard et G. Simart. *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Bologna. Corsi di Analisi superiore.* Anni 1894-95 e 1895-96 [Prof. Pincherle].

Necrologio: *Francesco Brioschi* [C. Hermite]. *Elenco delle pubblicazioni di F. Brioschi.*

Notizie: *I premi dell' Istituto di Francia. — Gauss e la teoria delle funzioni ellittiche. — La data della visione dantesca. — Un concorso olandese. — Medaglia Sylvester.*

PAFNUTII LVOVITCH TCHÉBYCHEF
ET SON ŒUVRE SCIENTIFIQUE

par A. Vassilief

A MONSIEUR CH. HERMITE
EN SOUVENIR DE SON AMI P. TCHÉBYCHEF

§ 1.

Biographie. — Premières recherches (Théorie des nombres).

Pafnutii Lvovitch Tchébychef, fils de parents nobles résidant dans le gouvernement de Kalouga, district de Borovsk, naquit le 11/26 Mai 1821. Comme bien des enfants actifs et intelligents, il éprouvait un grand plaisir à construire des jouets mécaniques, tels que petits moulins etc. Je lui ai entendu raconter que dès ses premières leçons de géometrie il aperçut la liaison étroite existant entre ses jouets

Digitized by Google

favoris et ce nouveau sujet d'études. « Il faut que j'apprenne bien ces choses là » se dit l'enfant, et il se mit à étudier la géométrie avec ardeur. Ainsi se manifestèrent dès l'enfance les penchants et les tendances d'esprit du géomètre qui, pendant toute son existence, rechercha les méthodes mathématiques les plus propres aux applications de la mécanique.

Admirablement préparé dans la demeure paternelle par une éducation qui donna libre carrière au développement de ses penchants naturels, Tchébychef en 1837 devint étudiant de la Faculté Physico-mathématique de Moscou. Cette Université brillait alors d'un vif éclat; l'enseignement mathématique était donné par d'excellents professeurs, entre autres, Zernof et Braschman.

En 1841 Tchébychef quitta l'Université avec le diplôme de candidat, après avoir obtenu une médaille d'or pour un travail intitulé « Sur la résolution numérique des équations algébriques d'ordre supérieur ». Ses études universitaires terminées, c'est en 1843 qu'il débuta comme savant par deux notes publiées dans les premiers journaux mathématiques de l'époque. La première est une « Note sur une classe d'intégrales définies multiples », qui parut dans le Journal de Liouville [1] (*), et attira l'attention de Catalan; la deuxième parut l'année suivante dans le Journal de Crelle [2] et traite de la convergence de la série de Taylor. Ces deux sujets n'eurent depuis qu'un intérêt secondaire pour Tchébychef. C'est vers cette époque que le jeune savant commença à s'occuper de la théorie des probabilités, qu'il devait enrichir plus tard de résultats d'une si haute valeur. Le but de son « Essai d'analyse élémentaire de la théorie des probabilités », (1845) [3] est, comme il le dit dans la préface, de « démontrer, *sans le secours de l'Analyse transcendante*, les théorèmes généraux du calcul des probabilités, et d'en déduire de même les principales applications sur lesquelles reposent toutes les connaissances fondées sur les observations et sur les expériences ».

Cet essai valut à Tchébychef le grade de *magister*, et en 1847 il fut invité par l'Université de Saint-Pétersbourg à professer l'Algèbre supérieure et la Théorie des nombres. Quelque temps avant son arrivée à Saint-Pétersbourg, l'Académie Impériale des Sciences avait entrepris la publication d'une édition complète des mémoires d'Euler *(Opera minora collecta)*. L'Académicien Fuss dans son rapport sur ce sujet, daté du 6 Avril 1841, écrivait: « Hoc monumentum, quod etiam ad veram Russiae in litteris gloriam promovendam valebit, est editio completa viris illius quem Academia Petropolitana inde a

(*) Ce numéro entre crochets, comme ceux qui suivent, se rapporte à la liste des ouvrages et mémoires de Tchébychef placée à la fin de l'article actuel.

Digitized by Google

prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur ». Le jeune Tchébychef fut appelé à collaborer à cette œuvre grandiose, et dès 1849 Bouniakofsky et lui firent paraître les deux grands volumes qui, sous le titre « Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae », contiennent les 99 mémoires d'Euler sur la théorie des nombres. Ces mémoires (parmi lesquels un mémoire étendu, « Tractatus de numerorum doctrina », et quelques autres encore parurent alors pour la première fois) sont disposés dans l'ordre chronologique ; mais un « Index systématique et raisonné » [7] admirablement rédigé, précède cette collection. Si l'idée d'une nouvelle édition d'Euler, émise dans ces dernières années et correspondant à un pressant besoin scientifique, va se réaliser, grâce au concours de toutes les nations civilisées, on n'aura qu'à prendre comme modèle l'excellente édition des œuvres arithmétiques à laquelle collabora Tchébychef.

L'édition des mémoires d'Euler conduisit le jeune mathématicien à étudier la théorie des nombres, et, comme pour essayer ses forces, il attaqua pour commencer le problème le plus ardu de la théorie des nombres, la recherche de la loi de distribution des nombres premiers dans la série des nombres naturels et il consacra à cette question deux mémoires rémarquables.

Dans le premier de ces mémoires [5] il démontre par une analyse extrémement élégante que la fonction $\varphi(x)$, qui détermine le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, vérifie une infinité de fois, entre les limites $x = 2$ et $x = \infty$, les deux inégalités

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$$

et

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

quelque petite que soit la valeur de α, supposée positive, et quelque grand que soit en même temps le nombre n. Il s'ensuit que l'expression

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x,$$

pour $x = \infty$, ne peut avoir une limite différente de 1, ce qui ne s'accorde pas avec la formule approximative pour la fonction $\varphi(x)$, donnée par Legendre $\left(\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366}\right)$.

Digitized by Google

De même il s'ensuit que l'on peut adopter comme valeur approchée de la fonction $\varphi(x)$ l'intégrale $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ (*).

Dans le second mémoire [8], Tchébychef donne une équation fonctionnelle, verifiée par $\theta(z)$, la fonction qui désigne la somme des logarithmes néperiens de tous les nombres premiers qui ne surpassent pas z. Cette équation (**), trouvée en même temps par le Prince A. de Polignac et plus tard généralisée par Tchébychef [54], donne deux limites pour la fonction $\theta(z)$, ce qui permit à Tchébychef de démontrer rigoureusement le célèbre postulatum de M. Bertrand: « Entre le nombre N et le nombre $2N-2$ il y a toujours un nombre premièr ».

Pendant l'époque comprise entre les publications de ces deux mémoires, Tchébychef fit paraître son ouvrage classique sur la théorie des congruences qui lui tint lieu de thèse de doctorat. Cinquante années se sont écoulées depuis la publication de cet ouvrage, mais il n'a rien perdu de sa haute valeur scientifique et pédagogique; les deux traductions (en allemand et en italien) qui ont paru dans ces dernières années [6] nous le prouvent et nous dispensent aussi de l'analyse détaillée de l'ouvrage. Disons seulement que ce livre est aussi remarquable par son style élegant et précis que par l'originalité de l'exposition qui se manifeste spécialement dans les derniers chapitres, traitant de la résolution des congruences du second degré à deux inconnues et de l'application de la théorie des congruences à la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers.

On peut considérer comme un complément de ces recherches le mémoire sur les formes quadratiques [9], où l'auteur montre que pour décider si un nombre donné N est premièr ou composé, on peut se servir non seulement des formes quadratiques à déterminants négatifs, comme le fait Euler dans ses recherches, mais aussi des formes $\pm(x^2 - Dy^2)$, dont les diviseurs quadratiques ne sont que de la forme $\lambda x^2 - \mu y^2$. Les théorèmes trouvés par Tchébychef sont appliqués au nombre 8520191, dont la nature présente un intérêt particulier pour la théorie des nombres (***). Tchébychef prouve que ce nombre est premièr.

C'est ici la place de citer quelques autres beaux résultats obtenus par Tchébychef dans le domaine de la théorie des nombres.

(*) GAUSS en 1792 trouve empiriquement cette même valeur approchée de $\varphi(x)$.

(**) Voir SERRET. *Cours d'Algèbre supérieure* 3.ième édit., tome II, p. 201.

(***) LEGENDRE (*Théorie des nombres*, tome II, 3e édit., 1830, p. 152) trouva que les deux nombres $A = 2^4 \times 8520191$ et $B = 2^4 \times 257 \times 3302^2$ sont des nombres amiables, si le nombre 8520191 est un nombre premièr.

Digitized by Google

Le résultat de la recherche de la valeur de $f(1)$, $f(x)$ étant liée a une autre $F(x)$ par une équation de la forme

$$F(x) = f(x) + f(2x) + f(3x) + f(4x) + \cdots,$$

montre que

$$f(1) = A_1 F(1) + A_2 F(2) + A_3 F(3) + A_4 F(4) + \cdots$$

Si n est premier, on a $A_n = 1$; si n est le produit de plusieurs facteurs premiers différents au nombre de k, on a $A_n = (-1)^k$; enfin si n contient deux fois le même facteur premier, A_n est nul. Un beau développement de e^{-a} en produit d'une infinité de facteurs est un des résultats du théorème cité (Voir [10] et aussi Bertrand. *Calcul différentiel* p. 334). Cette recherche de Tchébychef est intimément liée à l'équation verifiée par la somme des logarithmes des nombres premiers. Une équation plus générale conduisit Tchébychef à ce résultat remarquable qu'il y a une différence dans la répartition des nombres premiers de la forme $4n+1$ et ceux de la forme $4n+3$ dans la série des nombre naturels, qui se manifeste, par exemple, par ce fait que la valeur de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-(2n+1)c}$$

tend vers l'infini, lorsque c tend vers zéro.

Notons enfin le résultat mentionné par M. Hermite dans son cours [79] rélativement à la valeur du rapport $\frac{P_n}{n}$, quand P_n est le plus grand nombre premier contenu dans le nombre $1 + 4n^2$. La démonstration rigoureuse de la propriété qu'a ce rapport de tendre vers l'infini avec n a été donnée récemment par M. Markof d'après un fragment trouvé dans les manuscrits de Tchébychef après sa mort (*).

Ses brillants mémoires sur la théorie des nombres placèrent Tchébychef au premier rang parmi les mathématiciens russes et le designèrent comme professeur au choix de l'Académie des sciences de S. Pétersbourg. Les chaires des mathématiques pures y étaient occupées par Fuss, Ostrogradsky et Bouniakofsky; aussi l'Académie, n'ayant pas de chaire de mathématiques pures disponible, s'empressa de l'appeler en 1853 a la chaire des mathématiques appliquées. Nommé en 1859 académicien ordinaire, et bientôt après professeur ordinaire à l'Université de Saint-Pétersbourg, Tchébychef, grâce au célibat exempt des soins de famille, consacra sa vie exclusivement à la recherche et à l'enseignement. Son enseignement ne fut pas moins rémarquable que ses découvertes; son esprit toujours clair et vif s'y réflètait;

(*) Comptes rendus, T. CXX, 1895. p. 1032-1034.

Digitized by Google

on ne pouvait écouter ses leçons sans être absorbé par leur intérêt, sans être entrainé par leur enthousiasme (*). Ce fut grâce à son talent de maitre que Tchébychef eut des disciples nombreux qui travaillèrent avez zèle au développement de ses idées. Aussi Tchébychef était il entouré dans l'Université de Saint-Pétersbourg d'une auréole de gloire, et ce fut un grand coup pour l'Université quand, nonobstant les prières réiterées du Conseil Académique de l'Université, il résolut en 1832 de quitter sa chaire pour se consacrer exclusivement à l'Académie. Presque tous les ans il allait passer l'été à l'étranger, et l'Association française pour l'avancement des sciences l'a vu souvent assister aux séances de ses Congrés. Ses voyages à l'étranger lui valurent beaucoup d'amitiés scientifiques qu'il aimait à rappeler, même au milieu d'une leçon. Une amitié particulière le liait à MM. Hermite, Bertrand, Catalan, plus tard à MM. Ed. Lucas et Laisant. Il aimait Paris et on l'y voyait toujours plein d'entrain et d'amabilité. Mais à St. Pétersbourg il menait une vie très retirée qu'il consacra aux mathématiques jusqu'à la fin de sa vie. La veille même de sa mort subite, qui survint le 26 Nov. (8 Décembre) 1894, il s'entretint encore de mathématiques au sujet d'une simple règle pour la rectification très exacte d'une courbe qu'il avait découverte [83].

Les mérites de Tchébychef furent hautement appréciés par le monde scientifique. En 1860 il fut élu membre correspondant de l'Académie de Paris, et en 1874 son associé étranger. C'est le premièr russe qui ait eu cet honneur depuis Pierre-le-Grand. Aucun savant russe n'a de son vivant joui d'une telle gloire, qui ne pourra que devenir plus grande quand le monde scientifique connaîtra tout l'ensemble des recherches et des idées ingénieuses de Tchébychef. Aussi doit on se réjouir extrèmement de l'excellente idée qu'a eue l'Académie de St. Pétersbourg de publier deux éditions complètes des Œuvres de notre illustre géomètre (en russe et en français). Le premier volume de cette édition est déjà en voie de préparation.

§ II.

Valeurs approchées d'une fonction. Questions de minima d'un genre particulier. Fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro. Construction des cartes géographiques.

Avant la nomination de Tchébychef à la chaire académique de mathématiques appliquées, deux problèmes de cette science — un

(*) De 1860 jusqu'à 1875 il donna des leçons sur la théorie des intégrales définies et sur l'intégration des équations différentielles, sur la théorie des nombres et sur celle des probabilités. En 1875 il transmit à un autre professeur le cours sur les équations différentielles.

Digitized by Google

problème de la théorie des mécanismes et un problème de balistique — lui avaient ouvert un champ de recherches tout-à-fait nouveau et très fécond, où il est parvenu a créer une nouvelle branche des mathématiques, ayant pour but de donner des méthodes d'approximation qui fournissent le maximum d'exactitude pour toutes les valeurs de la variable entre deux limites données. Pour fixer les idées du lecteur, j'abandonnerai maintenant l'ordre strictement chronologique afin de pouvoir grouper ensemble les travaux analogues, et je commencerai par faire connaître une série de recherches qui eut pour point de départ un problème de la théorie des mécanismes, où il s'agit d'assurer la direction rectiligne du mouvement d'une pièce soumise à un effort oblique.

Donner la théorie du célèbre parallélogramme de Watt et de ses autres modifications, ainsi qu'une méthode pour déterminer les éléments le plus convenables pour la précision du jeu du parallélogramme — tel fut le but de son mémoire de 1853: « Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes » [11]. Pour résoudre ce problème, il faut trouver des formules approximatives d'un caractère tout-à-fait distinct de celui des formules qui sont données par l'analyse ordinaire. La somme des n premiers termes de la formule de Taylor nous donne pour la fonction $f(x)$ un polynôme qui, parmi tous les autres de même degré, s'approche le plus près de la fonction $f(x)$ pour $x = a$, et c'est ce polynôme que l'on prend pour valeur approchée de la fonction $f(x)$. Mais dans ce problème de la théorie des mécanismes, il s'agit de trouver le polynôme qui s'approche le plus d'une fonction donnée, non pour une valeur particulière de $x = a$, mais pour un intervalle donné de x, entre $x = a - h$ et $x = a + h$. Ce polynome P est déterminé par la condition que la plus grande valeur que prend la différence $f(x) - P$ entre des limites données s'écarte le moins possible de zéro, c'est-à-dire soit moindre que cette différence pour tous les autres polynômes de même degré. A mesure que l'intervalle considéré décroit, la seconde valeur approchée de $f(x)$ se rapproche de celle qu'on trouvée au moyen du développement de $f(x)$ suivant les puissances de $x - a$. Mais tant que cet intervalle reste fini, les coefficients de ces deux valeurs diffèrent entre eux, et ces différences, même dans le cas où elles sont petites, ne peuvent être négligées dans la théorie des mécanismes.

Une analyse ingénieuse reduit la question posée à l'intégration d'une équation différentielle de la forme:

$$\frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2-1)\,P}} = \frac{dy}{\sqrt{y^2 - L^2}},$$

où P et Q sont des polynômes de degrés $2m$ et m, et L une constante.

Digitized by Google

Pour le cas ordinaire et qui se présente dans la théorie des parallélogrammes ($m = o$), l'intégration s'effectue immédiatement, et fournit la forme générale du polynôme qui détermine les différences entre les coefficients de la valeur approchée de $f(x)$, trouvée au moyen de son développement suivant les puissances de $x - a$, et ceux pour lesquels la limite des erreurs dans l'intervalle $x = a - h$, $a + h$ est un *minimum*. On obtient ainsi, sous forme d'un polynôme, la valeur approximative de la fonction dans un intervalle donné. Dans le mémoire [20] qui parut en 1857 Tchébychef résout des questions d'un ordre plus général, notamment: « étant donnée une fonction quelconque $F(x)$ possédant n paramètres arbitraires $p_1, p_2, \ldots, p_n$, il s'agit par un choix convenable des valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de rendre minimum, la limite des écarts de zéro de la fonction $F(x)$, entre $x = -h$ et $x = +h$ ».

Tchébychef considère en particulier les trois cas suivants:

$$F(x) = p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n - y$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n}{A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + A_{m-1} x + A_m} - y$$

$$F(x) = \frac{p_1 x^{n-l-1} + p_2 x^{n-l-2} + \cdots\cdots + p_{n-l-1} x + p_{n-l}}{p_{n-l+1} x^l + \cdots\cdots + p_n x + l} - y$$

Les fonctions déterminées d'après les conditions posées donneront ainsi des valeurs approchées de y sous forme d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle ayant un dénominateur donné ou arbitraire.

Après avoir donné les théorèmes généraux pour la résolution des questions posées, Tchébychef s'arrête plus spécialement sur le cas $y = o$ c'est-à-dire sur la recherche des polynômes et des fractions rationnelles qui s'écartent le moins possible de zéro entre les limites $x = -h$ et $x = +h$. Nous ne nous arrêterons un instant que sur la première question, celle de la recherche du polynôme $F(x)$ de la forme

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + p_{n-1} x + p_n.$$

Des considérations à la fois simples et ingénieuses ramènent cette question à un problème d'analyse indéterminée, c'est-à-dire à la recherche de deux polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ satisfaisant à l'équation $F(x)^2 - L^2 = (x^2 - h^2)\,\Phi^2(x)$, L désignant la plus grande valeur absolue du polynôme $F(x)$, lorsque x varie de $-h$ à $+h$.

Cette équation, que l'on ramène aisément à la forme:

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} - \sqrt{x^2 - h^2} = \frac{L^2}{\Phi(x)\left[F(x) + \Phi(x)\sqrt{x^2 - h^2}\right]},$$

montre que $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ doit être une des réduites du développement en

Digitized by Google

fraction continue convergente de $\sqrt{x^2-h^2}$; on en déduit pour le polynôme $F(x)$ la forme définitive suivante :

$$F(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^n}{2^n} \qquad (*)$$

Des conséquences importantes peuvent être tirées de cette valeur de la fonction qui, entre $x=-h$ et $x=+h$, s'écarte le moins possible de zéro. Telle est l'application à l'interpolation. Tchébychef montre que, sous le rapport de la précision des résultats d'interpolation, le système de valeurs de $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... , $f(x_n)$ les plus avantageux est celui où la fonction $(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_n)$ s'écarte, entre les limites d'interpolation, le moins de zéro, et que, par conséquent, on doit prendre

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^n}{2^n},$$

lorsqu'il s'agit d'interpoler entre les limites $x=-h$, $x=+h$.

On peut de là déduire d'importantes conséquences pour l'Algèbre supérieure, sous forme de théorèmes relatifs aux limites des racines: nous donnerons comme exemple le suivant: « Si l'équation

$$x^{2l+1}+Ax^{2l-1}+\cdots+Sx+K=0$$

ne contient que des puissances impaires de x, une au moins des racines est comprise entre

$$-2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}} \quad \text{et} \quad 2\sqrt[2l+1]{\frac{K}{2}} \ \text{».}$$

Les fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro, étudiées dans le mémoire fondamental qui nous occupe, peuvent croître et decroître entre les limites données. Plus tard Tchébychef se proposa la question de déterminer les polynomes qui s'écartent le moins possible de zéro et sont de plus assujetis à la condition de croître continuellement ou bien de décroître continuellement entre les limites données. Tel est le sujet d'un mémoire de 1873 [45]. Les polynômes qu'on trouve alors sont des polynômes que Tchébychef a nommé « polynômes analogues aux fonctions de Legendre » (dans le cas ou le polynôme est de degré impair et est une fonction toujours croissante, ce polynôme coincide avec la fonction X_n de Legendre); il déduit encore de la forme de ces polynômes des résultats importants pour la théorie des limites des racines.

(*) BERTRAND. *Calcul différentiel*, p. 188.

Digitized by Google

Enfin, plus tard, Tchébychef appliqua les formules générales du mémoire « Sur les questions de minima etc. », à la recherche des expressions approchées d'une racine carrée au moyen de fractions irréductibles et à la détermination de polynômes qui, entre les limites données, représentent le mieux ces fractions [66, 73, 76]. Les deux résultats qu'il trouve dans ces mémoires, c'est-à-dire la meilleure représentation de $\sqrt{\frac{1}{x}}$ par la fonction

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \cdots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

où les coefficients A, B_i, C_i s'expriment par des fonctions elliptiques, et la représentation de la fraction $\frac{1}{H - x}$ par un polynôme, peuvent être appliqués à la recherche des valeurs approchées des intégrales

$$\int \frac{U du}{\sqrt{V}} \quad \text{et} \quad \int_{-h}^{+h} \frac{f(x)\,dx}{H - x}.$$

Tchébychef a consacré de plus un mémoire spécial [43] à la question des quadratures, où il considère l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x)\,\varphi(x)\,dx$, et généralise les beaux résultats de M. Hermite relatifs à l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$.

Tchébychef avait étudié a fond Euler et avait reconnu que celui-ci l'avait precédé dans la considération des fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro; il en donna une belle application dans l'étude des projections géographiques. Dans ses recherches sur la projection conique, Euler détermine les coefficients de la projection d'après la condition qu'une ellipse, dite « ellipse d'altération », diffère le moins possible d'une circonference (*). C'est probablement cette remarque d'Euler, conforme aux pensées qui occupaient Tchébychef depuis 1853, qui l'a porté à s'occuper de la construction des cartes géographiques, et à se proposer le problème de trouver parmi toutes les projections qui conservent la similitude dans les parties infinitésimales celle pour laquelle l'altération du rapport d'agrandissement dans toute la carte se reduit à un *minimum*. Tchébychef repond à cette question par le théorème suivant: « Parmi toutes les projections qui conser-

(*) *De projectione geographica Delisliana in mappa generali Imperii Russici usitata* (Acta Acad. Petrop. pro anno 1777).

Digitized by Google

vent la similitude des éléments infiniment petits, la projection pour laquelle le rapport d'agrandissement est constant le long du contour de la région représentée est celle qui donne les plus petites altérations de ce rapport à l'intérieur du contour ». Comme Lagrange avait donné pour le logarithme du rapport d'agrandissement la formule

$$log\ m = U - log\ \frac{2}{e^{u} + e^{-u}},$$

où U est l'integrale de l'équation $\frac{d^2 U}{du^2} + \frac{d^2 U}{dt^2} = 0$, le théorème, donné par Tchébychef en 1856 sans demonstration [17], constitue une application de sa théorie de fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro à la théorie des équations aux derivées partielles; la demonstration du théorème a été donné par M. Gravé en 1894 (*).

Tchébychef a donné une application de son théorème à la carte géographique de la Russie qui, présente, à cause de l'étendue du pays, des difficultés particulières. Tandis que la projection stéréographique donne pour la Russie Européenne des altérations du rapport d'agrandissement qui vont jusqu'à $^1/_{34}$ de la valeur normale de ce rapport, la projection recommandée par Tchébychef diminue cet écart jusqu'à $^1/_{50}$ de cette valeur; c'est le plus haut degré d'exactitude qu'on puisse obtenir si on représente les méridiens et les parallèles par des cercles ou des droites [18].

§ III.

Intégration des différentielles irrationnelles.

C'est l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - L^2}} = \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\,P}},$$

à laquelle Tchébychef a ramené le problème de la détermination de la valeur approchée d'une fonction dans son mémoire [11], qui a été le point de départ de ses recherches sur l'intégration des différentielles irrationnelles; cette équation montre en effet que $\int \frac{2\,Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)\,P}}$, où P et Q sont des polynômes, peut être réduite à un terme logarithmique. Depuis lors, la théorie de l'intégration sous forme finie devint un des sujet d'étude de prédilection de l'illustre géomètre, et là, comme partout ailleurs, il a obtenu des résultats remarquables.

(*) Association franç. pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen, 1894.

Digitized by Google

Dans le mémoire [12] Tchébychef donne une méthode pour trouver la partie algébrique, dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{\theta(x)}}$, où $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ sont des fonctions entières quelconques et m un nombre entier positif; il y donne également une méthode pour déterminer séparément tous les termes logarithmiques à l'aide des conditions analytiques que ceux-ci doivent vérifier. C'est aussi dans ce mémoire qu'il montre que les méthodes ordinaires de l'intégration des différentielles binômes à exposants rationnels renferment tous les cas où cette intégration est possible au moyen de fonctions algébriques et logarithmiques.

Dans le mémoire [14] Tchébychef fait voir comment on peut trouver, d'après les conditions données dans le mémoire [12], les termes logarithmiques dans le cas le plus simple où la différentielle porte sur la racine carrée d'un polynôme du 3e ou du 4e degré. Il démontre aussi que l'intégration d'une différentielle élliptique, lorsqu'elle peut être effectuée sous forme finie, se réduit en fin de compte à l'évaluation d'intégrales de forme

$$\frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}.$$

Dans mémoire spécial, consacré à l'intégration de cette différentielle [26], Tchébychef donne, pour le cas où α, β, γ, δ sont rationnels, une méthode qui au moyen d'opérations algébriques en nombre limité, conduit ou bien à trouver si pour une certaine valeur déterminée de A, l'intégrale ci-dessus peut s'exprimer en termes finis, ou bien à reconnaître si celà n'est possible pour aucune valeur de A. Cette méthode a une grande superiorité sur celle d'Abel, qui conduit à une série d'opérations pouvant se prolonger indéfiniment sans jamais atteindre un résultat décisif (*).

C'est dans ces questions que Tchébychef reconnut l'immense importance pour l'analyse des fractions continues introduites par Abel dans la question de l'intégration sous forme finie. Son attention une fois portée sur ce sujet le conduisit aux plus belles applications de la théorie des fractions continues, et la plus grande partie de ses recherches ultérieures est intimement liée à cet instrument d'analyse que personne depuis Lagrange et Abel n'a manié avec une facilité pareille à celle de l'illustre géomètre russe. Mais avant de passer à ces nouvelles ap-

(*) Le cas plus général de α, β, γ, δ réels quelconques a été consideré par un des disciples de Tchébychef, Zolotaref, et résolu par une méthode ingénieuse à l'aide de la théorie des nombres entiers complexes.

Digitized by Google

plications, je veux encore mentionner les recherches de Tchébychef relatives à une question plus élevée de la théorie de l'intégration des différentielles irrationnelles, où les fractions continues cessent d'être applicables; c'est celle de l'intégration des différentielles irrationnelles qui renferment une racine cubique [30, 36].

Dans le mémoire [12] Tchébychef a montré que, si l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{F(x)\sqrt[m]{R(x)}}$ peut s'exprimer sous forme finie, elle aura la forme

$$Z\sqrt[m]{R^{m-1}} + \Sigma A \log\left[\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right)\varphi^{\alpha}\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)\right]$$

où Z et φ sont les fonctions rationnelles et α une racine primitive de l'équation $x^m - 1 = 0$. Pour l'intégrale $\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt[m]{R(x)}}$, il se présente la question algébrique suivante: trouver les fonctions

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right),\ \varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots,\ \varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right)$$

qui vérifient l'équation

$$\varphi\left(\sqrt[m]{R}\right).\varphi\left(\alpha\sqrt[m]{R}\right)\ldots.\varphi\left(\alpha^{m-1}\sqrt[m]{R}\right) = C,$$

où C est une constante. Pour les intégrales des différentielles portant sur une racine carrée, la question se ramène aisément à celle de trouver les polynomes P et φ satisfaisant à l'équation $P^2 Q^2 R = C$, et peut être résolue au moyen des fractions continues. Pour les intégrales des différentielles portant sur une racine cubique la question se ramène au problème de trouver trois polynomes X, Y, Z tels que le degré de l'expression

$$X + Y\sqrt[3]{R_1 R_2^2} + Z\sqrt[3]{R_1^2 R_2}$$

($R = R_1^2 R_2^3$) soi le plus petit possible. Cette recherche exigeait une nouvelle méthode; on est en présence d'un problème des plus difficiles, dont se sont occupés Jacobi et M. Hermite, et qui dans ces dernières années a attiré de nouveau l'attention de géometres éminents. Cette nouvelle méthode a été exposée par Tchébychef dans le mémoire [36], où l'illustre analyste donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}}$$

puisse être evaluée sans forme finie. *(Continua).*

Digitized by Google

RECENSIONI ED ANNUNZI

OEUVRES DE LAGUERRE *publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par* MM. CH. HERMITE, H. POINCARÉ *et* E. ROUCHÉ, *Membres de l'Institut.* Tome I. *Algèbre. Calcul intégral.* — Paris, Gauthier-Villars, 1898, 8.° gr. p. 15 + 471.

« Edmondo Laguerre (ha scritto E. Rouché) visse modesto e tranquillo, lontano dalle agitazioni mondane, fra i libri, la famiglia e pochi amici provati. Le sue ricerche scientifiche, le esigenze de' suoi doveri professionali, l'affetto per la sua amabile compagna, finalmente l'educazione delle sue due figlie l'assorbirono completamente; nessun altro piacere ebbe attrattive per lui, e, nella nostra epoca di desiderî impazienti e di ambizioni febbrili, Laguerre seppe attingere le sue gioie soltanto alle sorgenti purissime del dovere e del lavoro ».

Nato a Bar-le-Duc il 9 aprile 1834, dopo avere compiuti gli studi preparatorî, entrò nella Scuola politecnica e ne uscì ufficiale d'artiglieria quando già aveva inaugurata la sua carriera di scienziato con un articolo di geometria, omai famoso, inserto nelle *Nouvelles Annales de Mathématiques* del 1853 e che fece pronunciare a Terquem il seguente fatidico giudizio: « Profondo investigatore in geometria ed in analisi, il giovane Laguerre è dotato di uno spirito d'astrazione eccessivamente raro, e non saranno mai soverchî gl'incoraggiamenti ai lavori di quest'uomo pieno d'avvenire ». Tuttavia Laguerre, forse perchè assorbito dagli obblighi militari, forse perchè stava maturando le ricerche che oggi ammiriamo, tacque per dieci anni; soltanto verso il 1864, quando tornò a Parigi in seguito alla sua elezione a ripetitore alla Scuola politecnica, riprese la interrotta serie delle pubblicazioni scientifiche, ed in vent'anni di lavoro le portò a 140. Esse trattano gli argomenti seguenti: applicazione degli immaginarî alla geometria; applicazioni del calcolo integrale e della teoria delle forme alla geometria; geometria infinitesimale; geometria di direzione; metodi d'approssimazione per certe funzioni analitiche; risoluzione numerica delle equazioni; equazioni differenziali; funzioni ellittiche.

I brillanti risultati esposti in questa bella raccolta di scritti attrassero sopra Laguerre l'attenzione dei geometri dell'Istituto di Francia e gli fecero accordare, addì 11 maggio 1883, un posto all'Accademia delle scienze; quasi nello stesso tempo la benevolenza di Bertrand gli aperse le porte del Collegio di Francia ed è appunto il corso fatto da Laguerre come supplente del Bertrand che diede occasione alle im-

Digitized by Google

portanti ricerche sull'attrazione degli ellissoidi con cui splendidamente si chiude la luminosa carriera scientifica del Laguerre. Ma nel momento appunto in cui egli otteneva la constatazione ufficiale delle sue alte benemerenze scientifiche, una malattia violenta lo assaliva, malattia che nè le assidue cure nè il cambiamento di clima valsero a vincere e che il 14 agosto 1886 lo conduceva al sepolcro.

Se, come fu detto « le temps est l'avocat des hommes méconnus », e se per lunghi anni Laguerre non ha goduto dell'alta considerazione che meritava, è certo che il tempo patrocinò così bene che finì per vincere la causa completamente: non solo in vita gli fu concesso quel lauro accademico che in Francia è considerato come il passaporto per l'immortalità, ma poco dopo la sua morte gli venne conferita un'onorificenza quale (per non abbandonare la Francia) Chasles non ha ancora ottenuto e a Cauchy venne concessa soltanto mezzo secolo dopo la sua scomparsa, cioè la pubblicazione delle opere sue complete sotto il patronato dell'Areopago scientifico francese e sotto la responsabilità di tre fra i più famosi scienziati contemporanei.

Il primo volume della collezione delle opere di Laguerre contiene quelli fra i lavori di lui che concernono l'algebra ed il calcolo integrale. Non si attenda il lettore che io qui ne faccia un' analisi minuta; lo spazio nol consente e d'altronde molto di quanto io direi sarebbe già noto a tutti coloro che in questi ultimi anni tennero dietro alle pubblicazioni matematiche della Francia. Voglio soltanto notare che nel detto volume s'incontrano riuniti i lavori del Laguerre sulla risoluzione delle equazioni numeriche che, nel loro insieme, formano la parte più considerevole della sua opera scientifica ed alla quale egli stesso attribuiva grande importanza; anzi, quando la morte lo colse, egli proponevasi di coordinare queste indagini e riunirle in un volume che ne avrebbe contenuta l'esposizione metodica completa (sarebbe stato diviso in tre sezioni contenenti rispettivamente la generalizzazione ed applicazione del teorema di Descartes, i metodi d'approssimazione pel calcolo delle radici numeriche, la ricerca delle radici intere). Va ancora notato come gran parte delle argomentazioni del Laguerre siano applicabili a polinomî in x ad esponenti frazionarî e con un numero infinito di termini; esse pertanto accrescono le nozioni, oggi ancora così scarse, sulle equazioni trascendenti. A ragione pertanto il Poincaré lamentava che le investigazioni del Laguerre fossero rimaste interrotte, esclamando « combien de secrets il a emporté dans la tombe ». Perciò è da augurare che qualche altro geometra riprenda il filo interrotto degli studî del Laguerre; e non è destituita di fondamento la ipotesi che appunto per incoraggiare e facilitare tale nobile compito l'Istituto di Francia abbia deliberata la pubblicazione integrale delle *Oeuvres de Laguerre*. G. L.

Digitized by Google

W. NERNST und A. SCHÖNFLIES. — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie.* München u. Leipzig 1895, 8.° p. XI + 309.

I concetti primarii del calcolo infinitesimale trovano una così naturale e necessaria applicazione nella analisi scientifica, possiam dire, di ogni fatto fisico, che a molti reca meraviglia come vi sia in realtà una relativamente piccola comunione di idee fra i cultori delle matematiche superiori e quelli delle scienze d'osservazione. La meraviglia non è veramente giustificata: basta avere, sia pur poca, famigliarità colle ricerche sperimentali per sapere con quanto fascino e quanta esigenza esse assorbano completamente l'energia dello studioso; e d'altra parte basta aver gustato una volta la dolcezza delle speculazioni matematiche per comprendere come quelle sole, indipendentemente da qualsiasi applicazione, possano soddisfare, per tutta la vita, la più eletta intelligenza.

Ma se una divisione, generalmente marcata, fra gli studiosi di matematiche pure e quelli di scienze d'osservazione è abbastanza giustificata, non si può dire davvero che essa sia utile al progredire della scienza. Senza voler ricordare quante volte lo studio dei fatti naturali abbia dato occasione, in passato, a scoperte nel campo delle matematiche, basta pensare come spesso ci accade, ora, di sentire da cultori di scienze d'osservazione lamentare la loro poca perizia nelle matematiche. Quante volte il fisiologo lamenta di non poter andare *più in là* della semplice rappresentazione grafica di un fenomeno vitale? Quante volte lo studioso di scienze economiche deve esporre faticosamente, e con poco frutto di chi legge, le manifestazioni d'un fatto, che con una semplice formola si esprimerebbe facilmente e si presterebbe ad ulteriori deduzioni? Quante volte nella statistica si ritiene come accertato un fatto, che un po' di critica matematica dimostrerebbe come pochissimo probabile? Quanto ai chimici, citiamo addirittura le parole di uno d'essi (prendiamo a prestito la citazione dalla prefazione del libro che forma il titolo di questo articolo), il Sig. J. John, professore di chimica a Berlino. Egli dice: « Anche i Chimici debbono una volta » per sempre abituarsi all'idea che, se non possederanno i principii » dell'analisi superiore, la chimica teoretica resterà per loro un libro » con sette sigilli ».

La ragione per la quale gli osservatori e sperimentatori non hanno, generalmente, una sufficiente istruzione matematica, dipende sopratutto dai programmi universitarii. Preoccupato, com'è troppo giusto, dall'idea di dare ai propri allievi un sicuro indirizzo alle ricerche matematiche,

Digitized by Google

chi insegna un ramo qualsiasi di matematica all' Università, deve procedere col piede di piombo e dare al proprio corso tutta quella gravità, quella prolissità, alla quale chi ha fretta di giungere alle applicazioni non può nè deve adattarsi. Un insegnamento che tocchi solo quei punti essenziali che hanno applicazione allo studio dei fatti naturali non esiste, almeno da noi, e non sarebbe nemmeno facile impresa. Ma sarebbe utile di certo. Nè esistono, per quanto ci è noto, da noi libri i quali cerchino, per dir così, di gettare un ponte fra le matematiche e le scienze d' osservazione. Crediamo pertanto utile dar notizia dell' opera elaborata appunto in questo indirizzo dai Sigg. *Nernst* e *Schonflies* (professori all' Università di Gottinga, di fisico-chimica il primo, di matematiche il secondo). È un succinto trattato di calcolo differenziale e integrale, che costituisce una *introduzione alla trattazione matematica delle scienze naturali*, con speciale riguardo alla Chimica. Diamo senz' altro un sunto dei varii capitoli dell' opera.

Il 1.° Cap.° è dedicato alla geometria analitica: coordinate cartesiane e polari nel piano: rappresentazione geometrica delle funzioni: studio elementare delle coniche. Nel 2.° cap.° con un ragionamento tanto minuto e chiaro, quanto è necessario per farsi ben comprendere dai principianti, è dedotta la nozione di *derivata* dallo studio di tre diversi problemi e cioè: la tangente alla parabola, la velocità nel moto uniformemente accelerato, la dilatazione lineare di un metallo. Le regole per la derivazione delle funzioni semplici e il concetto di *differenziale* sono stabiliti nel 3.° capitolo, alla fin del quale si trova pure un cenno sulla discontinuità delle funzioni.

Nel 4.° capitolo è definita la integrazione come operazione inversa della derivazione, e sono dati i metodi per le integrazioni più semplici: nel 5.° si tratta di alcune applicazioni del calcolo integrale e così: attrazione che un' asta lineare esercita sovra un punto; formola ipsometrica (a temperatura costante); legge di raffreddamento di Newton: lavoro fornito dalla dilatazione di un gaz ideale: *idem* per un gaz a forte pressione: *idem* per un gaz in via di dissociazione: temperatura massima di una fiamma: durata di una reazione chimica completa o incompleta.

Nel cap. 6.° si tratta degli integrali definiti con applicazione specialmente all' area racchiusa da curve, e si fa un cenno degli integrali doppi. Il 7.° tratta brevemente delle derivate di ordine superiore (con applicazione alla curvatura delle linee piane e all' accelerazione del moto vario) e della differenziazione delle funzioni di più variabili. Il concetto di differenziale totale è illustrato coll' esempio delle dilatazioni superficiale e cubica.

Il cap. 8.° è dedicato alle serie: vi sono esposti i criterii più semplici di convergenza: vi si tratta delle serie di Maclaurin e di Taylor,

Digitized by Google

delle quali è fatta applicazione agli sviluppi più comuni. Dagli sviluppi in serie si trae poi partito per lo studio delle forme indeterminate, e se ne dimostra l'utilità per eseguire in via approssimata quei calcoli nei quali entrano quantità molto piccole.

La teoria dei massimi e dei minimi forma argomento del cap. 9° ed è ivi applicata alla ricerca dei flessi delle linee piane, alla deduzione delle leggi di riflessione e di rifrazione e ad altri esempi. Il cap. 10.° tratta della soluzione numerica delle equazioni, sia con metodi grafici, sia col metodo di approssimazione di Newton; vi ha buon numero di esercizii numerici. Nell'11.° è dato un cenno della valutazione approssimativa (per mezzo delle differenze finite) della derivata e dell'integrale di una funzione della quale siano determinati sperimentalmente un numero discreto di valori. Il cap. 12.° finalmente è dedicato a talune applicazioni, e cioè: oscillazioni con o senza resistenza del mezzo: teoria cinetica dei gaz; modo di variare, colla temperatura, della quantità di calore dovuta ad una reazione: calore svolto dalla soluzione dell'acido solforico nell'acqua. Segue una raccolta di problemi semplici sul calcolo differenziale e integrale, e quindi un quadro delle formole più importanti.

L'indole del libro è tale da renderlo senza dubbio ben accetto a tutti quegli studiosi che sentono la necessità di estendere la loro coltura matematica; a qualcun d'essi parrà che vi siano ancor troppe formole; e forse qualcuna di queste benedette formole, che fanno tanta paura ai principianti, poteva evitarsi; ma, tutto sommato, non si può dire che gli Autori ne abbiano abusato. D'altro lato i matematici troveranno qua e là dei difetti di costruzione, ossia non sufficiente sicurezza di deduzione. Un rigore assoluto in un libro di questo genere non si può, nè si deve pretendere: ma qualche difetto poteva, mi pare, evitarsi. Porre, senz'altro (come fanno gli Autori a pag. 86 e 174 per illustrare la nozione di differenziale) $dx =$ p. es. a 0,0001, è cosa, per usare un eufemismo, almeno pericolosa; mentre poteva divenir tollerabile, quando, stabilito il teorema di Taylor, si fosse ben posto in evidenza come le relazioni fra i piccoli incrementi finiti delle variabili possano, in un dato ordine d'approssimazione e per dati valori delle variabili, ritenersi identiche alle relazioni che legano i differenziali. Nella teoria delle serie sarebbe stato bene fare in modo che il lettore inesperto non fosse indotto a credere che ogni serie convergente sia integrabile (pag. 212). Non sarebbe stato meglio rinunciare a trattare della integrazione delle serie in generale e limitarsi a dimostrare, il che è assai facile coll'aiuto del teorema di Taylor, come l'integrale di una funzione possa, *in un dato ordine d'approssimazione numerica* e per dati valori delle variabili, ottenersi integrando, termine a termine, lo sviluppo in serie limitato a un *dato* numero di termini?

Digitized by Google

Ci sarebbe stato caro veder dedicati uno o due capitoli alla teoria della combinazione delle osservazioni, la quale dovrebbe considerarsi come parte essenziale della coltura matematica di ogni osservatore e sperimentatore. L'unico cenno di applicazione di questa teoria, che si fa a pag. 242, è errato, perchè, dovendo calcolare una *media pesata*, gli A. assumono come *pesi* dei numeri inversamente proporzionali agli errori medii, invece che ai quadrati degli errori stessi.

Ma questi ed altri difetti, dei quali taluni potevano evitarsi, altri sono senza dubbio connessi di necessità coll'indole del libro, non tolgono alla bontà generale dell'opera e all'utilità di essa. E noi segnaliamo volentieri questa pubblicazione a due classi di persone: ai giovani studiosi di scienze fisiche, chimiche e naturali perchè ne traggano profitto, e ai giovani matematici italiani perchè veggano se non sia possibile fare, anche fra noi, qualche cosa che valga a meglio affratellare le matematiche alle scienze d'osservazione e sperimentali.

Genova, febbraio 1898.

P. PIZZETTI.

C. A. LAISANT. - *La mathématique. Philosophie — Enseignement.* Bibliothèque de la Revue générale des Sciences. — Paris, Carré et Naud, 1898, p. 292, 8.°

Il sistema filosofico di Pitagora si erige sulla nozione di numero e nella scuola che lo ebbe a duce la geometria si costituì ed ebbe forma di vera scienza; poco dopo Pitagora, un altro grande filosofo, Platone, si occupò di matematica non senza successo e contribuì, forse più col consiglio che coll'esempio, al progresso di tale scienza. E di matematica si occuparono, in varia misura, tutti i pensatori del periodo pre-euclideo, tanto vero che le più cospicue sette filosofiche hanno almeno un rappresentante nel Panteon dei geometri greci anteriori ad Euclide: gli atomisti, Democrito; gli Eleati, Zenone; i sofisti, Ippia. Ma Euclide decreta e segna il distacco tra matematica e filosofia, seguito in ciò da tutti i geometri del periodo greco-alessandrino, i quali colle loro splendide opere mostrarono di quanta utilità riuscisse alla matematica l'essere coltivata per sè, senza preconcetti di scuole e senza preoccupazioni di pratica utilità. E tale dimostrazione fu tanto efficace che, malgrado il tentativo fatto da Proclo col suo *Commento al I Libro degli Elementi* in senso opposto alle idee di Euclide, malgrado che *La Géométrie* di Descartes formi parte di un sistema filosofico, malgrado che Leibniz (in cui il matematico non è mai scompagnato dal filosofo) abbia proclamato che « senza le matematiche non si penetra sino al fondo della filosofia, senza la filosofia non si penetra sino al fondo della matematica, senza entrambe non si penetra al fondo di

Digitized by Google

niente », malgrado il fatto che i due più grandi filosofi del nostro secolo (Augusto Comte ed Erberto Spencer) siano stati matematici di professione od almeno per educazione, malgrado tutto ciò matematica e filosofia, pel loro indirizzo, pel loro metodo e persino pel loro linguaggio, rappresentano nello scibile due linee divergenti. E di tale stato di cose la matematica, non so se debba rallegrarsi, ma certamente non ha ragione di lamentarsi dal momento che (sia malgrado, sia per effetto di esso) la sua ricchezza progredisce ogni giorno con immensa velocità. Tuttavia tutti coloro che, per debito di ufficio o per elezione, consacrano la propria esistenza ad un ramo particolare della matematica, provano piacere e ritraggono vantaggio dal gettare uno sguardo sul suo insieme e sulle relazioni che intercedono tra essa e le altre discipline: ond'è che verrà accolto con gioja e riconoscenza l'invito, che rivolge il sig. Laisant nella I Parte del libro che annunciamo, di seguirlo nella descrizione che egli fa dello spettacolo che si offre a chi contempla ciò che è oggi la scienza matematica; e di averlo accettato nessuno avrà ragione di rammaricarsi tale e tanto essendo il garbo del Cicerone e la sua arte di rendere più interessanti anche le parti più squallide della regione percorsa. Certamente, per quanta cura egli ponga e quanta erudizione egli spieghi nell'additare i punti più notevoli, le plaghe più pittoresche, le regioni più ubertose, qualchecosa gli sfugge. Così sarà mosso appunto a lui, compatriota del Jordan, di avere dimenticata la teoria della sostituzione e quella delle forme algebriche; così, gli ammiratori del Lie non gli perdoneranno di avere passato sotto silenzio la teoria dei gruppi di trasformazioni, ed altri chiederanno perchè egli non abbia segnalata nè la estensione allo spazio della geometria del triangolo (geometria del tetraedro), nè la teoria delle funzioni algebriche di un variabile con cui (per merito specialmente di Dedekind e Weber) venne di tanto allargato il campo di studi dei cultori della teoria dei numeri. Nè mancheranno coloro che troveranno il Laisant di un esagerato empirismo quando predica la cacciata dall'aritmetica delle teorie formali (v. pag. 35, 37, 58) che un'ottima opera recente (1) avrebbe dovuto popolarizzare e far accettare in Francia; altri gli daranno torto di avere misconosciuto il legame esistente fra le idee del Boole e quelle su cui s'informa l'odierna logica matematica (p. 60-61), e tutti concordi gli negheranno la scusa di avere completamente passato sotto silenzio l'azione riformatrice che esercitò Stadnt sulla geometria e di avere creduto alla possibilità di funzioni (nel senso ordinario della parola) triplicemente periodiche, sessantatre anni dopo che Jacobi scrisse la fondamentale sua memoria *De functionibus dua-*

(1) Couturat, *De l'infini mathématique* (Paris, 1896).

Digitized by Google

rum variabilium quadrupliciter periodicis etc. (Giornale di Crelle, T. XIII).

Per quanto questi difetti non rendano meno solida la compagine della I Parte del lavoro del sig. Laisant, pure è dovere del critico il segnalarli, ed il critico gode poi nel dichiarare che, a parer suo, la II parte di esso si presta ancor meno ad appunti. Essa è dedicata all'insegnamento delle varie parti della matematica: rappresenta il frutto di molti anni di esperienza personale ed è così piena di osservazioni acute (1) che sono assai pochi gl'insegnanti che non vi troveranno qualche cosa da apprendere o almeno lo stimolo a nuove idee. Ciò non toglie che anche nella II Parte del libro del sig. Laisant esistano delle imperfezioni, ma queste sono in massima parte derivazioni del non avere l'A. alcuna conoscenza di quanto si pratica fuori della Francia (v. p. 7). Taccio della mediocre stima che l'A. semhra professare (v. p. 95) pel V Libro di Euclide: ciò non deve recar meraviglia nella patria di Legendre! Osservo invece come nei migliori trattati italiani di geometria siano raccolti con ogni cura ed enunciati esplicitamente tutti gli assiomi ed i postulati, cosicchè un voto dell'A. (p. 93) è da noi già esaudito; osservo ancora che il ravvicinamento della geometria del piano con quella dello spazio, che l'A. ritiene opportuno (p. 113 e 238), non rappresenta più per noi una questione didattica da risolvere: il de Paolis per quanto concerne la geometria elementare (*Elementi di geometria*, Torino 1884) ed il Raschi per quanto concerne la geometria analitica (*Geometria analitica alle coordinate*, Parma 1891) hanno dimostrato che la fusione è, non solo teoricamente possibile, ma, assai spesso, praticamente utile. Inoltre un trattato di geometria analitica (del piano e dello spazio) in coordinate cartesiane oblique (come l'A. desidera, p. 239) esiste da un pezzo in Italia: è la *Geometria analitica* (nuova edizione; Torino, 1895) del Prof. d'Ovidio; così si possiedono anche le tavole, invocate dall'A. (p. 151), dei valori naturali delle linee trigonometriche, e fra esse ricorderò le recenti *Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln fur logarithmiches und trigonometriches Rechnen von.* H. Schubert (Leipzig. 1897); finalmente l'introduzione, che l'A. consiglia (p. 226) del concetto di trasformazione geometrica negli elementi venne già fatta da molti. Quanto poi alla necessità di insegnare contemporaneamente gli elementi del calcolo infinitesimale e la geometria analitica, è cosa assai discutibile: infatti il sig. Simon, in un trattatello di cui recentemente rendemmo conto in questo *Bollettino* (v. p. 18-19) è riuscito a stabilire, senza adoperare

(1) Cito fra altre la carica a fondo contro la trigonometria ed il costume di riguardarla come una scienza a se (p. 228-230).

Digitized by Google

i procedimenti proprî dell'analisi sublime, le proprietà più interessanti della cissoide e di altre curve superiori. — Queste osservazioni (eccettuata l'ultima) provano che molti numeri del programma didattico delineato dall'A. furono già introdotti e svolti da altri e quindi indirettamente dimostrano di quanto acume egli diede prova redigendolo, e giustificano le lodi che abbiamo tributate, e che rinnoviamo, al simpatico direttore dell'*Intermédiaire des mathématiciens*, per la nuova opera di cui arricchì la letteratura matematica.

G. L.

Dott. G. VAILATI. - *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Lettura d'introduzione al corso di Lezioni sulla Storia della Meccanica, tenuto all'Università di Torino, l'anno 1897-98.* — Torino-Roma, Frassati e C. 8.° p. 41.

Raccomandiamo ai nostri lettori lo studio di questo ottimo lavoro (di cui già sono annunziate versioni in francese ed in polacco), denso di considerazioni interessanti e di fatti poco noti. Lo scopo generale di esso è indicato a sufficienza dal titolo; l'andamento generale poi è delineato con esattezza dall'introduzione che giudichiamo opportuno di riferire qui completamente:

« Tra le questioni sulle quali gli studi sulla storia delle scienze sono atti a gettare maggior luce, e alla cui soluzione è lecito aspettarsi che essi debbano massimamente contribuire, vanno senza dubbio poste in primo luogo quelle relative ai vari metodi di ricerca e di prova, alle cause della loro diversa potenza o fecondità e ai limiti della loro proficua applicazione nei vari campi di attività scientifica. Di ciò è facile comprendere la ragione. Finchè nel trattare questioni di questo genere noi ci limitiamo a desumere i nostri dati dall'osservazione dei risultati a cui portano, nelle singole scienze, i metodi e i procedimenti per esse attualmente adottati come convenienti, ci riesce impossibile avere a disposizione un materiale di fatti sufficiente per poter stabilire, tra i diversi modi di funzionare d'uno stesso metodo in diversi campi, e di diversi metodi in uno stesso campo, quei confronti che sono maggiormente richiesti per guidarci alla determinazione delle circostanze, dalle quali dipende la loro diversa applicabilità ed efficacia in ogni singolo caso. L'esame e l'analisi di tutti i casi nei quali un dato metodo è stato effettivamente messo alla prova, compresi quelli nei quali esso dovette essere abbandonato come fallace o infecondo, ci è reso sempre più difficile dal progredire stesso delle scienze, che porta gradatamente all'adozione di metodi sempre più perfetti e sempre più adatti ai rispettivi rami d'indagine, mediante un continuo processo di selezione e di eliminazione dei metodi che, in ciascuno di essi, vengono ad

Digitized by Google

essere riconosciuti meno adatti e meno potenti. È ora appunto su una questione di questo genere che intendo svolgere qui qualche considerazione, suggeritami da alcuni fatti nei quali mi sono imbattuto nelle mie ricerche sulla storia della meccanica. Essa si riferisce a una delle più fondamentali distinzioni, che si possono stabilire tra i procedimenti di ricerca scientifica, la distinzione, cioè, comunemente espressa dal contrapporre il ragionamento all'esperienza, l'argomentazione alla generalizzazione, il metodo deduttivo al metodo induttivo. Io mi studierò di definire e precisare la natura e l'importanza di questa distinzione accennando alle varie forme sotto le quali essa è stata concepita e formulata, e cercando di porre in chiaro i caratteri fondamentali sui quali essa si basa. Prendendo poi specialmente a considerare il metodo deduttivo, dedicherò qualche osservazione, da una parte a ciò che si potrebbe chiamare il suo stato di servizio nella storia della scienza, e dall'altra alle varie opinioni che sono state avanzate sul suo valore e sul suo còmpito, sia come strumento di ricerca e di spiegazione, che come mezzo di dimostrazione e di accertamento. Cercherò di analizzare le cause a cui si può attribuire il singolare contrasto tra i suoi trionfi e le sue conquiste in alcuni campi d'investigazione, come per esempio nelle matematiche e in alcuni dei più importanti rami della fisica, e la sua impotenza e i suoi umilianti insuccessi in altre sfere di ricerca, esaminando se e quanto tali insuccessi siano da imputare a qualche sua inerente incapacità, e quanto invece alla sua immatura o maldestra applicazione, e all'insufficiente elaborazione, o troppo affrettata scelta, degli assiomi e delle ipotesi che costituiscono il suo inevitabile punto di partenza. Esporrò finalmente le ragioni che vi si possono essere per ritenere che il metodo deduttivo tenda sempre più ad allargare la sua sfera d'azione e ad aumentare di efficacia e fecondità con l'aumentare del patrimonio delle umane cognizioni e col crescere di queste in precisione e moltiplicità, e accennerò ai motivi per i quali tale estensione del suo dominio non solo sembra dover essere ritenuta come utile e desiderabile, ma ha altresì ragione di essere annoverata tra gli scopi ideali più importanti della ricerca scientifica ». G. L.

Notes de Bibliographie des Courbes géométriques par H. Brocard. Bar-le-Duc. Imprimerie et Litographie Comte-Jacquet. Facdonel, directeur 1897. 8.° picc. p. 296 + xxx (autografato).

Alcune questioni inserite in *L'intermédiaire des mathématiciens* ed un tema di concorso posto a premio dall'Accademia delle Scienze di Madrid hanno messa in luce l'utilità che ci sarebbe di possedere un catalogo completo delle curve conosciute accompagnato da notizie bibliografiche su di esso. Il sig. Brocard, di cui è nota la competenza

Digitized by Google

in tutto ciò che ha attinenza colla bibliografia matematica e che già pubblicò, nel periodico succitato, un primo catalogo delle linee note, ci presenta ora un saggio del lavoro desiderato; ed è un saggio degno del suo autore.

Non ci addentriamo in una minuta analisi dell'opera annunciata (1), perchè l'A. dichiarando « Le présent Réceuil, encore à l'état d'avant projet, est extrait d'un Vocabulaire mathématique en préparation », disarma i suoi critici. Tuttavia non possiamo a meno di notare come egli, includendo nel suo catalogo anche delle curve (architettoniche) non rappresentabili con un'equazione unica e delle curve (fisiche) di cui non si conosce la rappresentazione analitica, non si attenne alla promessa fatta nel titolo: ha riunite cose troppo disparate ed ha fatto perdere al suo lavoro quella completa omogeneità, quel carattere di unità che tanto si apprezza in qualunque produzione scientifica. Ciò non ostante le *Notes* che annunciamo sono una preziosa miniera di informazioni interessanti e di cose utili e poco note; esse vanno pertanto raccomandate a tutti coloro che si occupano della teoria delle curve piane, anche perchè essi, segnalando all'autore le inevitabili lacune lasciate, lo aiuteranno nella edizione definitiva dell'opera, a cui egli attende mentre prepara un dizionario matematico completo.

G. L.

E. Picard *et* G. Simart. - *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* T. I, Paris, Gauthier-Villars, 1897, p. VI+246, 8°.

Il sig. Picard riprende coll'opera presente un ordine di ricerche a cui molti anni fa egli dedicò una memoria (2) di tal valore che venne premiata dall'Istituto di Francia; ricerche la cui importanza per tutta la matematica è evidente a chiunque pensi che la teoria delle funzioni di due variabili indipendenti è in sostanza la teoria delle superficie algebriche e che essa è destinata ad aprir l'adito alla teoria delle funzioni analoghe di quante si vogliano variabili indipendenti. È una teoria che non raggiunse ancora un alto grado di perfezione, essendo oggi appunto in istato di formazione, epperò potrebbe sembrare che l'opera che annunciamo sia prematura: è una obbiezione che gli autori stessi prevedono ed a cui rispondono dichiarando che il loro unico scopo è di dare un'idea dello stato attuale della scienza riguardo ad un tema il cui studio merita gli sforzi di molti investigatori.

(1) Maggiori particolari si troveranno in un articolo dell'Enestrom (*Bibl. mathem.*, 1897, p. 23-27).

(2) *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables* (Journ. de Math., IV Serie, T. V, 1889).

Digitized by Google

Il volume che ci sta sott'occhio si apre con un capitolo sugli integrali multipli di funzioni a più variabili. Ad esso ne segue uno sulla geometria di situazione, ove sono esposte, non senza aggiunte, le note indagini sull'*analysis situs* compiute da Riemann, Betti e Poincaré, l'applicazione delle quali allo studio delle superficie era stata messa in luce dal Picard stesso nella memoria dianzi ricordata. Nel veniente capitolo — relativo agli integrali delle funzioni razionali di due variabili indipendenti — si trova, fra l'altro, l'estensione data da Poincaré, nel T. IX degli *Acta mathematica*, del teorema fondamentale di Cauchy sull'integrale di una funzione di curva variabile complessa, nonchè la nozione di residuo degli integrali doppi, pure dovuta a quel celebre geometra. Il Cap. seguente comincia con un cenno (forse troppo fugace) (1) sulla riduzione delle singolarità delle superficie algebriche, il quale prelude alla determinazione ed allo studio di quei caratteri di una superficie algebrica che sono invariabili per trasformazioni birazionali, studio che è lo scopo precipuo del detto Cap. In seguito s'incontra la considerazione degli integrali di differenziali totali collegati ad ogni superficie, che il Picard introdusse per primo in tale teoria: una classificazione di tali integrali, analoga a quella degli integrali abeliani relativi ad una curva, si presenta naturalmente alla mente e conduce a distribuire quegli integrali in tre specie. Quelli di I specie sono finiti su tutta la superficie considerata e vengono accuratamente studiati nel Cap. V dell'opera in discorso. Quelli di II e III specie (la cui definizione è troppo lunga per trovar posto in un semplice resoconto) lo sono nel Cap. seguente.

In seguito gli autori espongono le ricerche intraprese dal Nother (Math. Annalen, T. II) e proseguite poi dal Picard stesso sugli integrali doppi di 1.ª specie, applicandone i risultati alla determinazione del « genere superficiale » di una superficie secondo Clebsch; applicando poi alcune proposizioni sopra i sistemi lineari di curve tracciate su una superficie si arriva all'altro carattere invariantivo di una superficie chiamato « genere lineare ». A proposizioni concernenti questi due generi è dedicato l'ultimo Capitolo dell'opera in discorso.

Da queste poche indicazioni si può arguire come tale esposizione della teoria delle funzioni algebriche, cominciate con un indirizzo prettamente analitico, e continuato sotto l'influenza dei concetti che governano il calcolo infinitesimale, tende insensibilmente ma continuamente verso la geometria: e tale indirizzo conserverà, fors'anche in modo più accentuato il futuro volume dal momento che gli autori, pure promettendo in questo delle applicazioni al calcolo integrale,

(1) Gli autori stessi se ne accorsero e vi rimedieranno nel T. II: v. *Bull. des Sciences mathém.*, Février 1898, I Parte, p. 27 nota.

Digitized by Google

dichiarano anche: « speriamo di far conoscere i principali risultati ottenuti in questi ultimi tempi da Castelnuovo ed Enriques, risultati che hanno rinnovata tutta una parte della teoria delle superficie ».

G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA - CORSI DI MATEMATICHE SUPERIORI
ANNO 1894-95.

I. *Le funzioni analitiche.*

Numeri complessi e loro variazione. - Campo di numeri complessi. - Funzione dei punti di un campo. - Valori infiniti della variabile, sfera di Riemann. - Continuità di una funzione dei punti di un campo. - Rapporto incrementale. - Condizioni per l'esistenza di un limite unico per il rapporto incrementale; loro varie forme. - Concetto di funzione analitica. - Le parti reale ed imaginaria di una funzione analitica sono funzioni armoniche. - Una funzione analitica dà una rappresentazione conforme di un piano-sfera su di un altro. - Reciproca. - Esempi. - Funzioni analitiche di più variabili.

Integrali di funzioni dei punti di un campo presi lungo una linea - Connessione dei campi. - Primo teorema di Cauchy; corollarî. - Teorema di Morera. - Secondo teorema di Cauchys:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} \frac{f(t)\,dt}{t-a}.$$

- Generalizzazione. - Espressione delle derivate. - Terzo teorema di Cauchy; sviluppo in serie di potenze. - Teorema di Laurent. - Sviluppo di Fouriér.

Esame dello svolgimento storico del concetto di funzione; introduzione necessaria della variabile complessa. - Punto di vista fisico, punto di vista aritmetico. - Serie di potenze; cerchio di convergenza. - Convergenza assoluta; convergenza uniforme. - Continuità, derivazione. - Coincidenza del concetto di funzione analitica con quello di funzione sviluppabile in serie del Taylor. - Limite superiore dei coefficienti di una serie di potenze. - Condizioni d'annullamento di una serie; di identità di due serie di potenze. - Metodo dei coefficienti indeterminati; esempi. - Serie di potenze negative. - Serie di serie di potenze. - Teorema di Weierstrass. - Teoria dei residui. - Sue applicazioni. - Dimostrazione

Digitized by Google

dell' esistenza di una radice per una equazione algebrica. - Ordine degli zeri e degli infiniti entro un contorno.

Punti regolari e singolari per una funzione analitica. - Linee ed aree singolari. - Concetto della continuazione analitica. - Continuazione immediata e mediata. - Campo di validità di una funzione. - Spazî lacunari. - Carattere della vera circonferenza di convergenza di una serie di potenze. - Principio della conservazione delle proprietà di una funzione mediante la continuazione analitica. - Teoremi sulle funzioni uniformi. - Punti singolari essenziali e non essenziali. - Carattere delle funzioni razionali intere e fratte. - Funzioni trascendenti intere. - Condizione di convergenza di un prodotto infinito. - Teorema di Weierstrass sulla scomposizione di una funzione trascendente intera in fattori primarî. - Classe e genere di una funzione intera. - Esempio: il fattoriale; formola di Gauss. - Teorema di Mittag-Leffler. - Applicazione, sviluppo della cotangente.

Funzioni multiformi. - Singolarità logaritmiche. - Singolarità della forma $(x-a)^r$. - Cenno sulle superficie di Riemann; linee di passaggio e punti critici. - Esempi.

Funzioni algebriche. - Continuità ed esistenza della derivata: le funzioni algebriche sono funzioni analitiche. - Superficie di Riemann per una funzione algebrica. - Punti critici; sistemi circolari di radici. - Connessione nelle superficie di Riemann; punti sezione; tagli di prima e seconda specie. - Ordine di connessione di un sistema di superficie; influenza di un taglio su quest' ordine. - Esempio delle superficie di Clifford. - Sistemi normali di tagli. - Genere.

II. *Elementi della teoria delle funzioni ellittiche.*

Periodi o moduli di periodicità di un integrale definito. - Integrali ellittici; integrale di prima specie. - Il rapporto dei periodi è essenzialmente complesso (dimostrazione di Picard). - Riduzione dell' integrale di prima specie alla forma di Legendre e a quella di Weierstrass. - Invarianti.

Metodo di Cauchy e Briot e Bouquet per lo studio dell' integrale di un' equazione differenziale. - Applicazione alla funzione $x(t)$ definita da $\frac{dx}{dt} = \sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$ - Dimostrazione dell' uniformità di $x(t)$. - Periodi. - Sue singolarità essenziale per $t=\infty$, non essenziale per ogni altro valore di t. - Impossibilità dell' esistenza di funzioni uniformi con un periodo infinitesimo - con più di due periodi. - Osservazione di Casorati sulle funzioni multiformi a più periodi.

Parallelogramma dei periodi. - Parallelogramma elementare; modo di comportarsi in esso di una funzione doppiamente periodica uni-

Digitized by Google

forme e con singolarità essenziale solo per $t = \infty$. - Funzioni doppiamente periodiche di 2.ª e 3.ª specie. - Funzioni intermedie. - Serie θ di Jacobi; espressione delle funzioni ellittiche mediante le serie θ. - Punti di livello in un parallelogramma elementare. - Funzioni di seconda specie; le sn, cn, dn e la p di Weierstrass. - Teorema di Liouville. - Semi-periodi nelle funzioni doppiamente periodiche d'ordine qualunque. - La funzione $\sigma(t)$, suo genere, sua classe. - Relazione con $p(t)$. - Teorema d'addizione. - Scomposizione di una funzione doppiamente periodica in funzioni semplici mediante la formola di Hermite.

III. *Elementi della teoria delle sostituzioni e loro applicazione alle equazioni algebriche.*

Operazioni in generale. - Uso del linguaggio geometrico degli iperspazi; le operazioni considerate come trasformazioni. - Esempi. - Prodotto di operazioni. - Gruppi di operazioni. - Esempi geometrici. - Trasformazioni proiettive. - Gruppi d'ordine finito od infinito, continui o discontinui. - Sotto-gruppi. - Operazione identica o unità. - Operazione inversa. - Gruppi simili; trasformata di un gruppo. - Operazioni comuni a due gruppi. - Sotto-gruppi distinti semplici o composti.

Le sostituzioni. - Ordine di una sostituzione. - Cicli. - Scambi. - Espressione di una sostituzione mediante i suoi cicli. - Sostituzioni regolari ed irregolari. - Sostituzioni di ordine primo e non primo. - Teorema di Lagrange. - Teorema di Sylow (dimostrazione di Frobenius). - Sostituzioni congrue. - Gruppo simmetrico; gruppo alternante, suoi cicli di 3.° ordine. - Transitività; teoremi sui gruppi transitivi. - Limite superiore dell'ordine di transitività. - Primitività e imprimitività. - Sotto-gruppo distinto d'ordine massimo; serie di composizione; teorema fondamentale relativo. - Il gruppo alternante; suoi numeri di composizione. - Numero di valori di una funzione razionale intera. - Gruppo ammesso da una tale funzione; indice. - Esempi. - Costruzione di una funzione che ammette un gruppo dato. - Specie di una funzione. - Specie contenuta in un'altra - Teorema sulle specie di due funzioni di cui una è funzione dell'altra a coefficienti simmetrici. - Specie di Galois. - Funzione di Galois. - Espressione mediante la funzione di Galois, di una funzione razionale intera data.

Radici di un'equazione. - Equazioni irriducibili. - Campo di razionalità; relatività del concetto di irriducibilità. - Funzione di Galois delle radici di un'equazione. - Teorema fondamentale di Galois. - Risolvente di un'equazione, suo campo di razionalità. - Gruppo di un'equazione. - Equazioni primitive, imprimitive, transitive. - Aggiunta di quantità al campo di razionalità; riduzione del gruppo. - Riduzione ad un sotto-gruppo distinto. - Equazioni aventi le radici legate da una relazione

Digitized by Google

razionale. - Equazioni abeliane di grado primo; la loro risoluzione. - Condizioni affinchè un'equazione sia risolubile per radicali. - Nota sulle equazioni dei quattro primi gradi; impossibilità della risoluzione per radicali delle equazioni generali di grado superiore al quarto.

ANNO 1895-96.

I. *Elementi della teoria delle funzioni analitiche.* (Con programma analogo a quello dell'anno precedente, ma con sviluppo più limitato).

II. *Sulla teoria dei gruppi di trasformazioni.*

Generalità sulle operazioni. - Campo di enti su cui si opera; proprietà che si ammettono per essi. - Prodotto di operazioni. - Gruppi di operazioni; esempi vari. - Trasformazione di un gruppo. - Isomorfismo oloedrico, meriedrico; esempi. - Continuità nel campo di enti su cui si opera; gruppi discontinui; gruppi continui. - Enti e classi invarianti. - Transitività, imprimitività.

Trasformazioni sui punti di uno spazio. - Definizione di una trasformazione per mezzo di un sistema di equazioni. - Avvertenze sulle funzioni di cui s'intende fare uso - Determinante funzionale di una trasformazione; punti regolari e singolari. - Numero dei parametri; parametri essenziali; condizione per l'indipendenza dei parametri. - Prodotto di trasformazioni; gruppo di trasformazioni. - Condizione affinchè un sistema di trasformazioni ad r parametri costituisca un gruppo; teoremi fondamentali di Lie. - Digressione sulle equazioni differenziali simultanee e le equazioni a derivate parziali del prim'ordine.

Gruppo delle omografie. - Gruppo delle affinità. - Omografie binarie. - Trasformazioni paraboliche, ellittiche e lossodromiche. - Interpretazione del gruppo delle omografie binarie come rappresentazione del piano di una variabile completa sopra un altro. - Gruppi di omografie binarie discontinui. - Gruppi Fuchsiani. - Gruppo modulare. - Metodo di Klein per rendere intuitiva la corrispondenza fra i due piani di variabile complessa: velocità, traiettorie, curve di livello. - Passaggio alla sfera; equivalenza delle omografie colle rotazioni della sfera su sè stessa; metodo di Cayley. - Gruppi d'ordine finito delle omografie binarie. - Funzione invariante del gruppo. - Equazione invariante. - Studio speciale dei diversi casi che si presentano: gruppi dei poliedri regolari. - Doppia piramide. - Gruppo dei quattro punti (*Vierergruppe* di Klein). - Gruppo dell'ottaedro. - Gruppo dell'icosaedro. - Funzioni automorfe nei gruppi precedenti. - Schwarziano: equazione differenziale del terz'ordine; suo legame con equazioni differenziali lineari del secondo ordine. - Determinazione delle equazioni differenziali lineari di secondo ordine ad integrale generale algebrico.

Digitized by Google

Divisione del piano in regioni mediante le trasformazioni del gruppo modulare. - Triangoli fondamentali; essi ricoprono tutto il semi-piano. - Dimostrazione dell'esistenza delle funzioni automorfe relative al gruppo modulare; loro costruzione, che può servire d'esempio per la trattazione del problema analogo per il caso generale di un gruppo fuchsiano.

Ritorno alla teoria generale dei gruppi di trasformazioni. - Equazioni differenziali del gruppo. - Gruppi ad un parametro. - Gruppi ad r parametri. - Trasformazioni infinitesime di un gruppo ad uno o a più parametri. - Interpretazioni concrete. - Trasformazioni infinitesime indipendenti. - Sistemi completi.

Applicazioni della teoria dei gruppi di trasformazioni alle equazioni differenziali fra due variabili. - Famiglie di curve invarianti per un gruppo di trasformazioni. - Relazione fra la trasformazione infinitesima ed il fattore integrante; teorema di Lie. - Esempi.

Trasformazioni di contatto nel piano. - Trasformazioni proprie ed improprie. - Gruppo di trasformazioni di contatto. - Elementi del piano; elementi uniti; varietà di elementi uniti. - Varî casi cui danno luogo le trasformazioni di elementi del piano. - Trasformazione che muta un punto del piano in una curva di un dato sistema ∞^2 di curve. - Condizione necessaria e sufficiente perchè tre equazioni rappresentino una trasformazione di contatto del piano. - Applicazione all'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

S. PINCHERLE.

NECROLOGIO

FRANCESCO BRIOSCHI

DI C. HERMITE (1).

La carriera del nostro illustre Corrispondente, la cui perdita è cagione di rimpianti tanto profondi, tanto unanimi, fu una delle più riempite e delle più onorate nella Scienza dell'età nostra. Durante più di quarant'anni i suoi lavori si succedettero ininterottamente, abbracciando i varî rami dell'Analisi, la Geometria superiore, l'Algebra, la teoria delle equazioni differenziali, delle funzioni ellittiche ed abeliane,

(1) Cenno necrologico pubblicato nei *Comptes rendus* del 27 Dicembre 1897 e qui tradotto col gentile consenso dell'Illustre Autore [G. L.].

Digitized by Google

la Meccanica, la Fisica matematica, e lasciando ovunque una traccia incancellabile del suo bell' ingegno. In principio, quando gli studi matematici, poco coltivati in Italia, non avevano altro organo che il giornale dell' abate Tortolini a Roma, Brioschi pubblicò in questa raccolta delle Memorie che rivelano un geometra di primo ordine. Esse hanno per temi il problema dei tre corpi, le variazioni delle costanti arbitrarie nei problemi di Meccanica, un importante lavoro di Dirichlet sull' Idrodinamica, la questione degli integrali comuni a parecchi problemi di Meccanica, sopra cui il nostro Collega Bertrand, aveva richiamato l'attenzione in una fra le più belle sue Memorie. Queste prime pubblicazioni gli valsero il privilegio, il raro onore di dare un impulso potente alla Scienza matematica del suo paese. Sotto la sua influenza, l'Analisi prende il proprio posto nel movimento intellettuale, una nuova raccolta surroga il giornale di Roma: gli *Annali di Matematica* secondano col migliore successo questa attività e, sotto la direzione del nostro Collega, si collocano al livello delle più importanti pubblicazioni della Francia, della Germania e dell' Inghilterra.

La vita scientifica di Brioschi diviene da quel momento un esempio pei suoi discepoli, e la stima universale collegata al suo nome è un incoraggiamento per quelli che seguono le sue traccie; egli merita che l'Italia attribuisca a lui con riconoscenza il lustro di cui essa è ora debitrice ai suoi geometri.

Ricordo brevemente, fra i molti lavori che onorano la sua memoria: in Geometria superiore, quelli concernenti le linee di curvatura, le proprietà delle superficie le cui linee di curvatura sono piane o sferiche, l' integrazione dell' equazione delle linee geodetiche, le tangenti doppie delle linee di quart' ordine aventi un punto doppio; poi, sul Calcolo integrale, un lavoro sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, un altro sulla distinzione dei massimi e dei minimi nel calcolo delle variazioni, una Memoria sopra una proprietà delle equazioni a derivate parziali del primo ordine, che venne tradotta dal Boole ed inserita nel *Trattato delle equazioni differenziali* del celebre geometra inglese. L'Algebra rappresenta pure una parte notevole nell' attività scientifica del nostro Collega; citerò i lavori sopra i determinanti gobbi, l' eliminazione, la generalizzazione delle proprietà di quei determinanti speciali su cui fondasi la trasformazione delle funzioni abeliane del primo ordine, la interpolazione, le funzioni di Sturm.

Brioschi fu il collaboratore di Sylvester e di Cayley nella lunga elaborazione della teoria delle forme con due od un numero qualunque di indeterminate, teoria che fu una delle principali opere matematiche del nostro tempo. Troppo lungo sarebbe enumerare tutti gli scritti sopra questa parte importante dell'Analisi, i quali colpiscono per la straordinaria potenza nel calcolo e che in pari tempo emergono per

Digitized by Google

la chiarezza dei metodi. Ma io non posso omettere di ricordare quella parte tanto importante delle indagini del nostro collega, ove l'Algebra si sposa alla Teoria delle funzioni ellittiche ed abeliane, e che guidano alla soluzione delle equazioni del 5.° grado e del 6.° Ivi il suo ingegno si mostra in tutto il suo splendore: egli getta una luce completa sulle proprietà più riposte dell'equazione Jacobiana che determina il moltiplicatore per mezzo del modulo nella trasformazione del 5.° ordine; egli svela il segreto della risoluzione dell'equazione del 5.° grado che Kronecker aveva dedotto da quella equazione, e che l'illustre geometra aveva comunicato alla nostra Accademia, senza dimostrare il suo bel risultato.

Per la equazione del 6.° grado, la via seguita è completamente diversa. Si esce dal campo delle funzioni ellittiche e si fa appello alle trascendenti più elevate che nascono dall'inversione degli integrali iperellittici della prima classe. Si adoperano le funzioni di due variabili analoghe alle trascendenti di Jacobi, e fra esse le dieci espressioni che, essendo funzioni pari, non si annullano per valori nulli degli argomenti. Sono queste le quantità per mezzo delle quali sono rappresentate le radici e che danno la risoluzione dell'equazione del 6.° grado, scoperta grande e bella che fu il coronamento della carriera scientifica di Brioschi.

Il primo geometra d'Italia fu Sotto-segretario di Stato e Senatore del regno. In Senato, ebbe gran parte nei lavori della Commissione del bilancio; fu l'organizzatore delle ferrovie della penisola; fu, dal Governo italiano, delegato alla Commissione internazionale del Metro a Parigi. Il nostro illustre Collega apparteneva alla maggior parte delle Accademie e delle Società scientifiche dell'Europa e dell'America, era presidente della R. Accademia dei Lincei; le massime distinzioni, gli onori di cui venne colmato, le grandi posizioni che ha occupate lo lasciarono sempre semplice e modesto.

Io sono stato associato ai lavori di Brioschi; spesso noi mettemmo in comune i nostri sforzi; io ho seguita la sua carriera che fu sì bella, riempita dallo studio e da grandi servigi resi al suo paese. Nessuno sente più di me la perdita del grande geometra e dell'uomo d'onore; il ricordo della sua amicizia, d'un legame stretto che risale alla nostra gioventù resterà sempre per me come uno dei migliori e dei più cari di tutta la vita.

Digitized by Google

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DI F. BRIOSCHI (1)

1. Sul moto del calore nel globo della terra. *Giornale dell'Ist. Lombardo.* T. I. 1847.
2. Dei criteri per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive. Id. T. III, 1851.
3. Intorno la integrazione di una equazione alla derivate del second'ordine. *Annali di Tortolini*, T. II, 1851.
4. Sur les déterminants des formes quadratiques. *Nouv. Ann. de Math.* T. XI, 1852.
5. Sulle equazioni alle derivate ordinarie lineari. *Annali di Tortolini*, T. III, 1852.
6. Sopra il prodotto reciproco dei raggi di curvatura di una superficie. Id.
7. Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie. Id.
8. Sopra un teorema di Jacobi intorno ai criterj d'integrabilità per distinguere i massimi dai minimi valori delle primitive. Id.
9. Sulle linee tautocrone. *Annali di Tortolini*, T. III, 1852 e T. IV, 1853.
10. Intorno le sviluppoidi e le sviluppate. *Id.* T. IV, 1853.
11. Sulle linee di curvatura delle superficie. Id.
12. Sulla integrazione della equazione delle geodetiche. Id.
13. Intorno ad alcune formole che si riscontrano nella teorica delle superficie Id.
14. Sulla variazione delle costanti arbitrarie nei problemi della dinamica. Id.
15. Intorno ad un teorema di meccanica analitica. Id.
16. Intorno ad alcuni teoremi di geometria. Id.
17. Sur une proprieté d'un produit de facteurs linéaires. *Cambridge and Dublin Math. Journal*, T. IX, 1854.
18. Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches. *Giornale di Liouville*, T. XIX, 1854.
19. Sur les fonctions de Sturm. *Nouv. Ann. de Math.*, T. XIII, 1854.
20. Sopra un teorema nella teorica delle forme quadratiche. *Annali di Tortolini*, T. V., 1854.
21. Sulle teoria degli invarianti. Id.
22. Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie. Id.
23. Intorno ad una nota proprietà di alcune equazioni alle derivate parziali. Id.
24. Intorno ad alcune questioni d'algebra superiore. Id.
25. Sulle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione. Id.
26. Intorno ad una proprietà degli invarianti. Id.
27. Intorno ad una formola per la risoluzione delle equazioni algebriche. Id.

(1) Il presente elenco (che non comprende le rassegne bibliografiche) venne paragonato dall'egregio Prof. Jung con uno, compilato dal Brioschi stesso, che abbraccia però soltanto le pubblicazioni non posteriori al 1875 [G. L.].

Digitized by Google

28. Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles. *Giornale di Crelle*, T. L, 1855.
29. Intorno al movimento di un punto materiale sopra una superficie qualsivoglia (1852). *Mem. della Soc. dei XL*, T. XXV, 1855.
30. Sui criterii d'integrabilità delle funzioni, e sulle equazioni isoperimetriche (1853). Id.
31. Méthode pour déterminer les racines communes à deux équations. *Nouv. Ann. de Math.*, T. XIV, 1855.
32. Relations de distance entre des points. Id.
33. Intorno ad alcune quistioni della geometria di posizione. *Annali di Tortolini*, T. VI, 1855 (Trad. francese in *G. di Crelle*, T. L, 1855).
34. Intorno ad alcune proprietà delle superficie del terzo ordine. *Annali di Tortolini*, T. VI, 1855.
35. Sulle costruzioni del sig. Chasles per le linee del terzo e quarto ordine. Id.
36. Intorno ad una proprietà delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine. Id.
37. Sopra una nuova proprietà degli integrali di un problema di Dinamica. Id.
38. Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair: et sur les déterminants binaines. *Giornale di Crelle*, T. L, 1856.
39. Sulle teorica dei covarianti. *Giornale dell'Ist. Lomb.*, T. VIII, 1856.
40. Sopra una estensione del teorema di Abel. Ivi.
41. Sugli integrali comuni a molti problemi di dinamica. Id. T. VIII.
42. Intorno ad un problema di statica razionale. Id. T. IX, 1857.
43. Sulla linea di stringimento di un sistema di linee a doppia curvatura. Ivi.
44. Sur les séries qui donnent le nombre des racines réelles des équations algébriques à une on plusieurs inconnues. *Nouv. Ann. de Math.*, T. XV, 1856; *Zeitschrift für Math. und Phys.* T. II, 1857.
45. Théorème sur une proprieté des racines des équations algébriques. *Nouv. Ann. de Math.*, T. XV, 1856.
46. Deux théorèmes de géométrie sur la droite et le cercle. Id.
47. Sul discriminante delle funzioni omogenee a due indeterminate, e sull'equazione ai quadrati delle differenze. *Annali di Tortolini*, T. III, 1856.
48. Sulle funzioni omogenee di terzo grado a due indeterminnte. Id.
49. Sopra una trasformazione delle equazioni caratteristiche per un discriminante. Id.
50. Ricerche algebriche sulle forme omogenee a due indeterminate. Id.
51. Sopra una formola di trasformazione per le serie doppiamente infinite. Id.
52. Ricerche algebriche sulle forme binarie. Id.
53. Sul principio di reciprocità nella teoria delle forme. Id.
54. Sur une nouvelle proprieté du résultant de deux équations algébriques. *Giornale di Crelle*, T. LIII, 1857.
55. Sur une formule de M. Cayley. Id.
56. Sur l'hexagone inscriptible dans une conique. *Nouv. Ann. de Math.* T. XVI. 1857.
57. Géométrie algorithmique: Sur le polygones inscrits et circonscrits aux coniques. Id.

Digitized by Google

58. Sulla partizione dei numeri. *Annali di Tortolini*, T. XIII, 1857.
59. Sulla trasformazione delle funzioni ellittiche. Id.
60. Sui poligoni inscritti alle coniche. Id.
61. Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche. Id.
62. Sur une proprieté du déterminant fonctionnel. *Quarterly Journal*, T. I, 1857.
63. Note sur deux théorèmes de géométrie. Id.
64. Sur l'intégration des équations ultra-alliptiques. *Giornale di Crelle*, T. LV, 1858.
65. Sulla trasformazione delle equazioni algebriche. *Atti dell'Ist. Lomb.*, T. I, 1858.
66. Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Id.
67. Sur la théorie de la transformation des fonctions abèliennes. *Comptes rendus*, T. XLVII, 1858.
68. Sur diverses équations analogues aux équations modulaires. Id.
69. Sullo sviluppo di un determinante. *Annali di Matematica*, T. I, 1858.
70. Sulle funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie. Id.
71. Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane. Id.
72. Sullo sviluppo delle funzioni Jacobiane secondo le potenze ascendenti dell'argomento. Id.
73. Intorno ad un teorema del sig. Borchardt. Id.
74. Dimostrazione di una formola di Jacobi. Id.
75. Sui covarianti delle forme a più variabili. Id.
76. Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche. Id.
77. Sulla risoluzione delle equazioni del 5.° grado. Id.
78. La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni. *Annali di Matematica*, T. I, 1858, T. II, 1859 e T. III, 1860.
79. Sur quelques proprietés des surfaces du troisième ordre. *Nouv. Ann. de Math.*, T. XVIII, 1859.
80. Intorno ad una formola d'interpolazione (due note). *Ann. di Matem.*, T. II, 1859.
81. Osservazioni sulla superficie delle onde. Id.
82. Sopra una trasformazione dell'integrale ellittico. *Annali di Mat.*, T. III, 1860.
83. Développements rélatifs au §. 3 des Recherches de Dirichlet sur un problème de dynamique. *Giornale di Crelle*, T. LIX, 1861.
84. Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado. *Mem. dell'Ist. Lombardo*, T. IX, 1863, e *Ann. di Mat.*, T. V, 1863.
85. Intorno ad una trasformazione delle forme quadratiche. *Giornale di Matematiche*, T. I, 1863.
86. Sopra una proprietà delle forme ternarie. Id.
87. Sur la théorie des formes cubiques à trois indeterminées. *Comptes rendus*, Id. T. LVI, 1863; *Annali di Mat.*, T. V, 1863.

Digitized by Google

88. Extrait d'une lettre à M. Hermite. *Comptes rendus*, T. LVI, 1863.
89. Sur une classe d'équations du quatrième degré. *Comptes rendus*, T. LVII, 1863.
90. Rede gehalten bei den feierlich Eröffrumg der Accademia Scientifico letteraria und des Istituto tecnico superiore zu Mailand. *Arch. fur Math.*, T. XLII, 1864.
91. Lezioni sulle teoria delle funzioni Jacobiane ad un solo argomento. *Giornale delle Matematiche*, T. II, 1864.
92. Sopra una nuova trasformazione dell'integrale ellittico *Rend. dell'Istituto Lombardo*, T. I, 1864.
93. Sopra una formola di Jacobi per la moltiplicazione delle funzioni ellittiche. Id.
94. Sopra una nuova formola del calcolo integrale. *Rend. dell'Accademia di Napoli*, T. III, 1864.
95. Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques. *Comptes rendus*, T. LIX, 1864.
96. Note sur une lettre de M. Hermite. *G. di Crelle*, T. LXIII, 1864.
97. Di alcuni recenti progressi nell'idraulica. *Il Politecnico*, T. I, 1866.
98. Delle traverse obblique alla direzione di un corso d'acqua. Id.
99. Sulle formule empiriche per la portata dei fiumi. Id.
100. Sur une classe de résolvantes de l'équation du cinquième degré. *Comptes rendus*, T. LXIII, 1866
101. Sopra alcune nuove relazioni modulari. *Atti dell'Acc. di Napoli*, T. III, 1866.
102. Proprietà fondamentali di una classe di equazioni algebriche. *Mem. dell'Istituto Lombardo*, T. X, 1867.
103. Sulle teoria delle coordinate curvilinee. *Annali di Matematica*, II Serie, T. I, 1867-68.
104. Il discriminante delle forme binarie del sesto grado. Id.
105. La soluzione più generale delle equazioni del quinto grado. Id.
106. Sopra le equazioni generali dell'8° grado che hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore corrispondente alla trasformazione di 7° ordine delle funzioni ellittiche. *Rend. dell'Ist. Lombardo*, T. I, 1868.
107. Sur une transformation des équations différentielles du problèmes des trois corps. *Comptes rendus*, T. LXVI, 1868.
108. Alcune proprietà degli invarianti di una forma del sesto grado. *Rend. dell'Ist. Lombardo*, II Serie, T. I, 1868.
109. Sur les fonctions de Sturm. *Comptes rendus*, T. LXVIII, 1869.
110. Sulla bissezione delle funzioni iperellittiche di prima specie, e sul problema geometrico corrispondente. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, T. XXIV, 1870-71.
111. Des substitutions de la forme $\Theta(r) = \varepsilon\left(r^{n-2} + a\,r^{\frac{n-3}{2}}\right)$ pour un nombre n premier de lettres. *Götting. Nachrichten*, 1869; *Mathematiche Annalen*, T. II, 1870.
112. Sur la bissection des fonctions elliptiques. *Comptes rendus*, T. LXX, 1870.
113. Nota sulla equazione che dà i punti di flesso delle curve ellittiche. *Rend. dell'Ist. Lombardo*, II Serie, T. II, 1869.

Digitized by Google

114. Sur l'équation du cinquième degré. *Comptes rendus*, T. LXXIII, 1871; T. LXXX, 1875.
115. Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double. *Mathem. Annalen*, T. IV, 1871.
116. Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. *Comptes rendus*, T. LXXIX, 1874.
117. Sulla teoria delle forme binarie del sesto ordine e la trisezione delle funzioni iperellittiche, di A. Clebsch. Traduzione con note ed aggiunte. *Annali di Matem.*, Serie II, T. VII, 1875.
118. Sulle condizioni per la decomposizione di una forma cubica ternaria in tre fattori lineari. Id.
119. Sopra un punto di correlazione fra le forme binarie del quarto grado e le ternarie cubiche. Id.
120. Studi analitici sulle curve del quarto ordine. Id.
121. Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques. Id. T. LXXX, 1875.
122. Sur la réduction d'une forme cubique ternaire à sa forme canonique. *Comptes rendus*, T. LXXXI, 1875.
123. Sulle condizioni che devono essere verificate dai parametri di una curva del 4.° ordine perchè la medesima sia una conica ripetuta. *Rend. dell'Acc. dei Lincei*, II Serie, T. III, 1876.
124. Sulle condizioni per la decomposizione di una cubica in una conica ed in una retta. Id.
125. Sopra una proprietà dei piani tritangenti ad una superficie cubica. Id.
126. Sopra talune equazioni differenziali ad integrale algebrico. *Rend. dell'Ist. Lombardo*, II Serie, T. IX, 1876.
127. Intorno al problema delle tautocrone. *Bullettino di Bibl. e Storia ecc.* T. IX, 1876.
128. Sur la résolution de l'équation du 5e degré. *Comptes rendus*, T. LXXXV, 1877.
129. Sopra alcuni recenti risultati ottenuti dal sig. Klein nella risoluzione delle equazioni del 5° grado. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. I, 1877.
130. Extrait d'une lettre à M. F. Klein. *Math. Ann.*, T. XI, 1877,
131. Sopra una classe di forme binarie. *Ann. di Mat.*, II Ser., T. VIII, 1877.
132. La théorie des formes dans l'intégration des equations différentielles linéaires du second ordre. Math. Ann., T. XI, 1877, e *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II, Serie, T. X, 1877.
133. Sur l'équation de Lamé. *Comptes rendus*, T. LXXXV, 1877.
134. Sur des cas de reduction des fonctions abéliennes aux fonctions elliptiques. Ivi.
135. Di una nuova equazione differenziale nella teorica delle funzioni ellittiche. *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II. Serie, T. X. 1877.
136. Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. *Math. Annalen*, T. XIII, 1878.
137. Nota ad una memoria di L. Kiepert. *Annali di Matematica*, II Serie, T. IX, 1878.

Digitized by Google

138. Sur l'équation de Lamé. *Comptes rendus*, T. LXXXVII, 1878.
139. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. *Annali di Matematica*, II Serie, T. IX, 1878.
140. Sur une équation différentielle du troisième ordre. *Proc. of the R. Society*, T. XXVII, 1878.
141. Su di alcune formole nella teorica delle funzioni ellittiche. *Rend. dell'Acc. dei Lincei*, III Serie, T. II, 1878.
142. Sopra una classe di equazioni modulari. *Annali di Matematica*, II Serie, T. IX, 1878.
143. Sulla equazione dell'ottaedro. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. III, 1879.
144. Un teorema nella teorica delle sostituzioni. *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II Serie, T. XII, 1879.
145. Sur les équations différentielles linéaires. *Bull. de la Société mathématique de France*, T. VII, 1879.
146. Ueber die Jacobi'sche Modulargleichung von 8ten Grade. *Math. Annalen*, T. XV, 1879.
147. Sulla equazione modulare dell'8° grado. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. III, 1879.
148. Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. *Annali di Matem.*, II Serie, T. X, 1880.
149. Sulla generazione di una classe di equazioni lineari integrabili per funzioni ellittiche. Id.
150. Di una proprietà delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Id.
151. Michele Chasles. Id.
152. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. *Comptes rendus*, T. LXXXXI, 1880.
153. Sur quelques équations différentielles linéaires. Id.
154. Sopra una classe di equazioni differenziali integrabili per funzioni ellittiche. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, Serie III, T. IV, 1880.
155. Il risultante di due forme binarie l'una cubica e l'altra biquadratica. *Collectanea matematica*, 1881.
156. Sopra una forma binaria dell'ottavo ordine. Id.
157. Théorèmes rélatifs à l'équation de Lamé. *Comptes rendus*, T. XCII, 1881.
158. Sur la théorie des équations différentielles du seconde ordre. Ivi.
159. Sulle equazioni differenziali del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro. *Annali di Matem*, II Serie, T. X, 1881.
160. Sopra un sistema di equazioni differenziali. Id.
161. La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque. Ivi.
162. Sur un système d'équations différentielles. *Comptes rendus*, T. XCII, 1881.
163. Sur une proprieté du paramètre de la transformée canonique des formes cubiques ternaires. *Proc. of the London Math. Society*, T. XII, 1881.
164. Sur la surface de Kummer à seize points singuliers. *Comptes rendus*, T. XCII, 1881.

Digitized by Google

165. Sur les fonctions de sept lettres. Id. T. XCV, 1882.
166. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. VI, 1882.
167. Sur une application du théorème d'Abel. *Comptes rendus*, T. XCIV, 1882.
168. Sur quelques proprietés d'une forme binaire du 8e ordre. Id. T. XCVI, 1883.
169. Sulle relazioni esistenti fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XI, 1883.
170. Sulla classe delle equazioni differenziali lineari considerate dal signor Mittag-Leffler. Id.
171. Le relazioni algebriche fra le funzioni iperellittiche del primo ordine. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. VII, 1883.
172. Sopra un problema d'analisi. *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II Serie, T. XVII, 1883.
173. Sulle proprietà di una forma biquadratica. *Giornale di Matematiche*, T. XXII, 1884.
174. Sulla teoria delle funzioni ellittiche. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XII, 1884.
175. Les rélations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques d'ordre *n*. *Comptes rendus*, T. XCIX, 1884.
176. Sopra una classe di curve del 4° ordine. *Ren. della R. Acc. dei Lincei*, III Serie, T. VIII, 1884.
177. Sopra una proprietà della ridotta dell'equazione modulare di ottavo grado. Id. IV Serie, T. I, 1885.
178. Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XIII, 1885.
179. Sur quelques équations différentielles. *Math. Annalen*, T. XXVI, 1885.
180. Sulla trasformazione delle funzioni iperellittiche del primo ordine. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, IV Serie, T. I, 1885.
181. Le equazioni modulari nella trasformazione del terzo ordine delle funzioni iperellittiche a due variabili. Id.
182. Sulle proprietà di una classe di forme binarie. Id. T. II, 1886.
183. Sopra una formola di trasformazione di integrali multipli. Ivi.
184. Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni ellittiche. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XIV, 1886.
185. Sulla teorica delle funzioni iperellittiche di 1° ordine. Ivi.
186. Sur quelques formules hyperelliptiques. *Comptes rendus*, T. CII, 1886.
187. I nuovi moduli per le funzioni iperellittiche a due variabili. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, IV Serie, T. II, 1886.
188. Sulla espressione per serie delle funzioni iperellittiche a due variabili. Ivi.
189. Sulla trasformazione delle equazioni algebriche. *Rend. del R. Istituto Lombardo*, II Serie, T. XX, 1887.
190. Ueber die Transformation der algebraischen Gleichungen durch Covarianten. *Math. Annalen*, T. XXIX, 1887.
191. Studi sulle forme ternarie. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XV, 1883.
192. Zur transformation dritten Grades der hyperelliptischen Functionen ersten Ordnung. *Math. Annalen*, T. XXVIII, 1887.

Digitized by Google

193. Sulle funzioni sigma iperellittiche (due note). *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, IV Serie, T. III, 1887.
194. Sopra una trasformazione delle equazioni del quinto grado. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XVI, 1888.
195. Principi di una teoria sulla trasformazione delle equazioni algebriche. Ivi.
196. La forma normale delle equazioni del sesto grado (due note). *Rend. della R. Acc dei Lincei*, IV Serie, T. IV, 1888.
197. Osservazioni su una comunicazione del sig. Maschke. Id.
198. Sur l'équation du sixième degré. *Acta mathematica*, T. XII, 1888.
199. Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili (due note). *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, IV Ser., T. IV, 1888.
200. Sur la transformation des équations algébriques. *Proc. of the London Math. Society*, T. XX, 1889.
201. Les discriminants des résolvantes de Galois. *Comptes rendus*, T. CVIII, 1889.
202. Sur la dernière communication d'Halphen à l'Académie. Id. T. CIX, 1889.
203. Sopra un simbolo di operazione nella teorica delle forme. *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II Serie, T. XXII, 1889.
204. Notizie sulla vita e sulle opere di G. E. Halphen. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, IV Serie, T. V, 1889. (Trad. franc. in *Bullettin de Darboux*, II Serie, T. XIV, 1889).
205. F. Casorati. Annuncio necrologico. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XVIII, 1889.
206. Ueber die Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen zweier Veränderlichen. *Götting. Nachrichten*, 1889.
207. Sullo sviluppo in serie delle funzioni sigma iperellittiche. *Mem. della R. Acc. dei Lincei*, IV Serie, T. VI, 1889.
208. Les invariants des équations différentielles linéaires. *Acta mathematica*, T. XII, 1890.
209. Sur la réduction de l'intégrale hyperelliptique à l'élliptique par une transformation du troisième degré. *Ann. de l'Ecole normale supérieure*, III Serie, T. VIII, 1891.
210. Sopra alcune formole ellittiche. *Atti dell'Acc. di Torino*, T. XXVI, 1891.
211. Sur une classe d'équations modulaires. *Comptes rendus*, T. CXII, 1891.
212. Sur une forme nouvelle de l'équation modulaire du 8e degré. *American Journal*, T. XIII, 1891.
213. Enrico Betti. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XX, 1892.
214. Gli integrali algebrici dell'equazione di Lamé. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, V Serie, T. I, 1892.
215. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Annales de la Fac. des Sciences de Toulouse*, T. VI, 1892.
216. Sur l'équation différentielle de Lamé. *Bull. de l'Académie de St.-Peterbourg*, III Serie, T. XXV, 1893.
217. Un teorema nella divisione dei periodi delle funzioni ellittiche. *Rend. del R. Ist. Lombardo*, II Serie, T. XXVI e XXVII, 1893 e 1894.
218. Sulla trasformazione dell'undecimo ordine delle funzioni ellittiche. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XXI, 1893.

Digitized by Google

219. Sulle equazioni modulari. *Rend della R Acc dei Lin.*, V Ser., T. II, 1893.
220. La trasformazione d'ordine pari delle funzioni ellittiche. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XXII, 1894.
221. Nuove formole nella moltiplicazione e nella trasformazione delle funzioni ellittiche. Ivi.
222. Notizie sulla vita e sulle opere del Socio Straniero Arturo Cayley. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, V Serie, T. IV, 1895. (Trad. francese in *Bull. de Darboux*, II Serie, T. XIX, 1895).
223. Sopra una trasformazione delle forme binarie e degli integrali corrispondenti. *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, V Serie, T. IV, 1895.
224. Cenno necrologico del defunto accademico L. Schläfli. Ivi.
225. Sur l'équation du sixième degré. *Ann. de l'Ec. normale superieure*, III Serie, T. XXII, Suppl., 1895.
226. Sur une classe d'équations du cinquième degré. Ivi.
227. Sur les racines multiples des équations algébriques. *Comptes rendus*, T. CXXI, 1895.
228. Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun. *Erlangener Sitzungsberichte*, 1895.
229. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$. *Giornale di Crelle*, T. CXVI, 1896.
230. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche. *Annali di Matematica*, II Serie, T. XXIV, 1896.
231. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange. Ivi.
232. Sopra un teorema del sig. Hilbert *Rend. del Circolo matematico di Palermo*, T. X, 1896.
233. Il risultante di due forme binarie biquadratiche e la relazione fra gl'invarianti simultanei di esse *Atti della R. Acc di Torino*, T. XXXI, 1896.
234. Sulle equazioni modulari. *Rend. della R. Acc. dei Lin.*, V Ser., T. V, 1896.
235. Sur la transformation des équations algébriques. *Comptes rendus*, T. CXXIX, 1897.
236. Sur l'équation jacobienne du sixième degré. *Quarterly Journal*, T. XXVIII, 1897.
237. Sur une classe d'équations du 5° degré résolubles algébriquement et la transformation du 11° ordre des fonctions elliptiques (presentato già stampato al I Congresso internazionale di Matematici tenuto a Zurigo nell'Agosto 1897).
238. Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine. *Ann. di Mat.*, II Serie, T. XXVI, 1897.

Opere pubblicate separatamente.

Alcuni punti di statica. Pavia, 1853.

La teoria dei determinanti e le sue applicazioni. Pavia, 1854.

La statica dei sistemi di forma invariabile. Milano, 1859.

Trattato elementare delle funzioni ellittiche di A. Cayley. Traduzione riveduta ed accresciuta d'alcune appendici da F. Brioschi. Milano, 1880.

Digitized by Google

NOTIZIE

I PREMI DELL' ISTITUTO DI FRANCIA. — Nella solenne adunanza tenuta il giorno 10 del corrente anno, l'Accademia delle Scienze ha conferito: il premio Francoeur a G. Robin pei suoi lavori di matematica, il premio Poncelet a R. Liouville per l' insieme dei suoi scritti di matematica e di meccanica, il premio Lalande al sig. Perrine per la scoperta di cinque comete, il premio Damoiseau a Ermanno Struve per la totalità delle sue opere astronomiche, il premio Valz a Luigi Fabry specialmente per la scoperta di un' interessante cometa, il premio Gegner a Paolo Serret, finalmente il premio Petit d'Ormoy (scienze matematiche) al compianto F. Tisserand specialmente pel suo *Traité de Mécanique céleste*.

Ricordiamo ora che il 1.° ottobre di quest' anno è il termine per la presentazione dei lavori di coloro che concorrono ai premi seguenti:

Gran premio delle Scienze matematiche. Dei lavori recenti avendo mostrato l' importanza che può avere nella teoria delle equazioni differenziali ed in quella delle funzioni la considerazione delle serie divergenti, l'Accademia propone di « cercare di estendere la parte che possono avere nell' analisi le serie divergenti ».

Premio Bordin. Studiare le questioni relative alla determinazione, alle proprietà ed alle applicazioni delle coordinate curvilinee ortogonali a n variabili. In particolare, indicare una maniera quanto si può precisa per determinare il grado di generalità di questi sistemi.

Inoltre al 1.° giugno 1899 si chiude il tempo utile per la presentazione dei lavori che concorrono al:

Premio Damoiseau. « Esporre la teoria delle perturbazioni d' Iperione, satellite di Saturno, scoperto nel 1846 contemporaneamente da Bond e Lassell, tenendo principalmente conto dell' azione di Titano. Paragonare le osservazioni con la teoria e dedurne il valore della massa di Titano ».

Pel 1900 i concorrenti all' analogo premio dovranno « fare la teoria di una delle comete periodiche di cui furon osservati parecchi ritorni ».

* * *

GAUSS E LA TEORIA DELLE FUNZIONI ELLITTICHE. — Dopo la pubblicazione delle opere complete di Abel e Jacobi, del carteggio tra quest' ultimo e Legendre, della biografia del grande norvegese scritta dal Bjerkness e dell' ottimo opuscolo del Königsberger *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826-1829* (Leipzig, 1879), le vicende della teoria delle funzioni ellittiche possono considerarsi completamente note per quanto concerne la parte che ebbero nella sua fondazione Abel e Jacobi. Una questione importante però rimaneva; determinare cioè sino a qual punto era giunto di tale teoria Gauss e per quali strade vi era pervenuto, questione estremamente interessante, non soltanto pel grande scienziato che ne è protagonista, ma anche per lo scettico disprezzo di cui Legendre

Digitized by Google

coprì i risultati annunciati dal sommo matematico di Gottinga. Ora tale importante problema storico è stato trattato concisamente, ma con grande profondità, dal compianto matematico P. Günther in una « Habilitationsschrift » letta nel 1890 dinnanzi alla Università di Berlino, presentata nell'Aprile 1894 alla Società scientifica di Gottinga e di recente tradotta in francese da L. Laugel col titolo *Les recherches de Gauss dans la théorie des fonctions elliptiques* (Journ. de Math. pures et appliquées, V Serie, T. III, 1897, p. 95-111). Ai lettori del *Bollettino* non riuscirà discaro se ne riferiamo qui l'epilogo:

« Abbiamo visto che Gauss, sin dalla fine dello scorso secolo, era stato condotto, mediante l'algoritmo della trasformazione di Landen, a rappresentare l'inversione dell'integrale ellittico di I specie mediante le quattro funzioni ϑ, nonchè a svolgere le proprietà più essenziali di queste nuove trascendenti. A lui non può essere sfuggito quale portata fondamentale abbia sulle funzioni inverse il teorema di addizione di Eulero per gli integrali, e da ciò fu indotto a penetrare più a fondo nella natura di queste funzioni per un secondo cammino, cammino che è quello in cui Abel entrò in questo campo circa trent'anni dopo. Le meravigliose relazioni tra le somme ed i prodotti infiniti, fornite dalla rappresentazione delle funzioni ϑ in prodotti, condussero finalmente Gauss ad un terzo modo di trattare questa teoria, col metodo cioè che, nella mia esposizione, ho chiamato metodo delle *identità*; tra i risultati di quest'ultima ricerca bisogna citare, in particolare, quelli che sono relativi alla teoria della trasformazione.

Così Gauss, e questo in parte con un metodo che per la sua originalità c'interessa in sommo grado, si era creato, parecchie decine d'anni innanzi Abel e Jacobi, una estesa teoria delle funzioni ellittiche rachiudente una parte dei risultati più importanti enunciati più tardi da questi geometri. Infatti tra i domini vasti ed estesi di questa teoria, sono veramente soltanto le ricerche piuttosto algebriche relative al teorema di Abel quelle cui egli rimase estraneo; ma per compenso la teoria di Gauss racchiude anche in varî luoghi i punti di partenza di ricerche più vaste che solo la posterità seppe condurre a compimento.

Se riflettiamo all'immensa portata delle scoperte di Gauss, importanza che certamente non poteva sfuggire al loro autore, sembra straordinario che egli abbia potuto pensare a nascondere tali tesori ai suoi contemporanei, sopratutto dopo che Abel e Jacobi coi loro lavori gli ebbero tolta la priorità di una parte dei risultati. Noi dobbiamo cercarne la spiegazione, secondo un'opinione di Guglielmo Weber che il sig. Weierstrass volle gentilmente comunicarmi, in questo fatto che Gauss non voleva mai cominciare la pubblicazione delle sue ricerche prima di avere completamente collegati fra di loro in pieno accordo i varî metodi che gli avevano dato accesso alla teoria. E tale opinione corrisponde assolutamente a tutti i principî di Gauss relativamente alla pubblicazione de' suoi lavori. Ciò non ostante noi crediamo di non spingerci troppo oltre considerando questa prima scoperta delle funzioni ellittiche ed il fatto della sua non pubblicazione come uno degli avvenimenti più sorprendenti ed il più meraviglioso di tutta la storia delle matematiche. »

Digitized by Google

Va notato che anteriormente alla pubblicazione del lavoro originale del Günther, il P. Pepin aveva già condotto a termine esposizione didattica, non storica, delle proposizioni che si trovano nelle opere postume di Gauss (vedi l' *Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les oeuvres posthumes de Gauss;* in Mem. dell'Acc. dei Nuovi Lincei, T. IX, 1893. p. 1-129).

∴

La data della visione dantesca. — Fra le questioni più importanti che si vanno dibattendo tra i commentatori di Dante vi è quella « quando ebbe il divino poeta la sua visione meravigliosa, cioè, quall' è la data del suo viaggio nel mondo degli spiriti? » problema questo di cui si renderanno perfettamente conto tutti coloro che ricordano gli innumerevoli dati cronologici che sono sparsi nella *Commedia*. A scioglierlo si provarono i più reputati dantisti senza giungere ad una conclusione completamente soddisfacente. Ora il sig. Filippo Angelitti, già noto per buoni lavori di astronomia, ispirandosi ad altri scritti consacrati alla indagine delle cognizioni scientifiche di Dante (1), ha dedicata a quella questione una elaborata memoria (2) destinata a prendere un posto eminente nella letteratura dantesca. Nella quale memoria, da una esauriente discussione dei dati cronologici contenuti nella *Commedia* e da un minuto esame (accompagnato da lunghi calcoli) dei fenomeni astronomici che avvennero attorno il 1300, il valente astronomo conclude che il 25 Marzo 1301 come data del principio del gran viaggio, è la sola che risponda pienamente a tutte le indicazioni scientifiche date nel poema. Aggiungiamo che l'A. mostra anche che si potrebbero scommettere 259,200 lire contro una lira che Dante non abbia inventati fenomeni celesti che descrive, ma li abbia direttamente osservati. « Ma più bello e meraviglioso (osserva l'Angelitti finendo) è che le sue descrizioni celesti, cimentate con le tavole, che oggi costituiscono il più grande monumento dell' astronomia di precisione, rispondono esattamente alla realtà, e manifestano in lui lo scienziato dedito a ricercare il vero, osservando e sperimentando. Pochi, forse, potranno immaginare il piacere, che io ho provato ogni volta, quando, dopo calcoli lunghi e faticosi, ho vedute confermate le indicazioni fornite da Dante: ma tutti vorranno meco partecipare all'ammirazione per lui che, esempio forse unico, accoppiò il genio della poesia con l'osservazione attenta ed accurata dei fatti della natura, e seppe disposare lo splendore delle concezioni artistiche con l'esattezza delle concezioni scientifiche. »

∴

(1) E. Capocci, *Illustrazioni cosmografiche della Divina Commedia.* (Napoli 1856). G. Antonelli *d. S. P., Sulle dottrine astronomiche della Divina Commedia* (Firenze, 1865).

(2) *Sulla data del viaggio dantesco desunta dai dati cronologici e confermata dalle osservazioni astronomiche riportate nella Commedia* (Atti della Accademia Pontaniana, Vol. XXVII. 1897).

Digitized by Google

Un concorso Olandese. — Ecco il *Programma dei concorsi a premio per l'anno 1898 posti dalla Società matematica di Amsterdam* (che ha per motto « Improbus labor omnia vincit »).

1. — Una tavola pesante orizzontale di forma e peso dati, poggia mediante tre piccoli piedi sopra un piano orizzontale che presenta attrito. Si domanda il luogo geometrico dei centri di istantanea rotazione attorno ai quali comincia il movimento quando si collocano su quelle tavole delle coppie orizzontali di differente grandezza. Studiare l'andamento di quel luogo tanto in generale che in alcuni casi particolari, e determinare il modo in cui il centro di istantanea rotazione si muove sull'anzidetto luogo geometrico al variare della coppia motrice.

2. — È noto (*Versl. en meded der Kon. Akad. van Wet.*, 2e Reeks, deel 10; Wiedemann *Ann.* deel 12), che in un gas, considerato come costituito di molecole sferiche completamente tetravalenti, la pressione aumenta, in causa delle dimensioni finite delle molecole, secondo una prima approssimazione, nel rapporto di $V - 4b$, a V, dove V rappresenta il volume totale e b quello che viene occupato dalle molecole sferiche. Si domanda una soluzione dello stesso problema in due dimensioni per molecole circolari ed ellittiche.

3. — Qualsivoglia figura matematica (superficie, curva, collezione di punti ecc.) dipendente da sei parametri, si può considerare come rappresentazione di un punto dello spazio. Si domanda di trovare e studiare una o più di tali rappresentazioni, che inoltre soddisfacciano alla condizione che la trasformazione projettiva (*collineazione*, secondo Reye, *Geometrie der Lage*) della rappresentazione sia in pari tempo la rappresentazione del punto trasformato.

4. — Si domanda lo studio della forma di alcune superficie (preferibilmente non rigate) polari reciproche di superficie contenenti *pinch points*.

5. — Determinare la curva focale, cioè il luogo dei fuochi (centri delle sfere di raggio nullo bitangenti) di una cubica gobba generale.

6. — Sopra un piano orizzontale è collocato un emisfero omogeneo pesante colla parte convessa in giù. Sulla superficie piana di esso poggia un secondo emisfero analogo, ma di raggio differente, anch'esso colla superficie convessa in giù. Si domanda di seguire le piccole oscillazioni attorno allo stato d'equilibrio proveniente da questo stato di cose, supponendo che il punto di contatto del secondo emisfero colla superficie piana del primo, sia vicino al centro di questo e che tutte le superficie considerate siano abbastanza ruvide per evitare lo slittamento.

7. — Si domanda una ricerca metodica delle particolarità eccezionali del primo ordine (cioè delle singolarità la cui presenza dipende da una sola relazione fra i coefficienti dell'equazione di una superficie generale di n^{mo} ordine) che possono presentare gli ombelichi di una superficie algebrica, p. es. quelle che concernono l'andamento delle linee di curvatura nella loro vicinanza. Si considerino specialmente i casi in cui due o più di questi punti coincidano o vadano all'infinito.

8. — Riemann, Enneper e Schwarz si occuparono di superficie minime contenenti un sistema di circoli posti in piani fra loro paralleli. Il catenoide

Digitized by Google

è l'esempio più semplice di tali superficie. Si domandano le condizioni affinchè, per due circoli eguali e posti in piani paralleli, si possa far passare una o più di queste superficie minime.

9. — Indicare quali differenti specie di luoghi ed inviluppi di punti, linee, superficie e spazi a tre dimensioni si possano concepire nello spazio a quattro dimensioni e determinare la genesi e le proprietà delle più semplice fra esse (Cfr. la memoria di G. Veronese nel Vol. XIX dei *Math. Annalen*).

10. — Congiungendo un fuoco di una curva piana di 3.ª classe ai punti ciclici del piano, si ottengono due rette tangenti alla curva; unendone poi i punti di contatto si ottiene una retta reale. In totale si hanno così tre rette reali; si domanda in quale relazione esse stiano colla curva data.

11. — Può accadere che le linee asintotiche della superficie luogo dei centri principali di curvatura di una ellissoide siano curve algebriche. Indicare un caso in cui ciò accade e determinare in corrispondenza la natura delle linee asintotiche.

12. — La teoria attuale dei fenomeni di polarizzazione cromatica in lamine di cristalli biassi esige che vengano successivamente trascurate delle quantità piccole; il che dà ad essa un carattere di artificiosità. Si richiede un perfezionamento di questa teoria che da un lato permetta la riunione di varî casi particolari e dall'altro rimandi le inevitabili semplificazioni ad uno stadio ulteriore.

In Mascart, *Traité d'Optique*, Vol. II, si trovano trattati dettagliatamente questi fenomeni. Sarà anche necessario di prendere notizia di una memoria di Bertin, *Ann. de Chimie et de Phisique*, 3ª Serie Vol. 63, p. 57 (1861) e di una di Lommel, *Wiedemann Ann.*, Vol. 18, p. 56 (1883).

13. — Quando lo spazio interposto fra due piani indefiniti paralleli perfettamente conduttori è riempito di un dielettrico omogeneo, si possono trasmettere in questo delle onde elettriche di cui tanto le fronti come le linee di forza elettrica sono perpendicolari su quei piani. Allora la velocità di trasmissione dipende in modo noto dalla costante dielettrica del medio. Si domanda una teoria di questo fenomeno pel caso in cui lo spazio posto fra quei due piani consti di due dielettrici differenti, disposti in modo che il piano che li separa sia parallelo agli altri due. In particolare si desidera sapere come la velocità di trasmissione lungo quei piani dipenda dalle due costanti dielettriche e dallo spessore dei due strati.

14. — Parecchi fisici (p. es. Lecher, *Wiedemann Ann.*, Vol. 41, p. 850 e Cohn, Id., Vol. 45, pag. 370) hanno fatto delle esperienze sulla trasmissione di onde elettriche lungo due fili metallici paralleli, fenomeno la cui teoria è semplicissima quando i fili si considerino come conduttori perfetti e quando si supponga che lo spazio circostante sia riempito di un solo dielettrico omogeneo. È allora possibile un movimento nel quale le fronti delle ondi sono perpendicolari ai fili e le linee di forza sulla fronte delle onde corrano da un filo all'altro. La velocità di trasmissione ha un valore noto dipendente dalla costante dielettrica. Nelle esperienze con fluidi questi erano racchiusi in recipienti cilindrici o prismatici a generatrici parallele ai fili stessi: ora, se le distanze della superficie cilindrica dei fili non sono

Digitized by Google

molto grandi rispetto alla distanza a dei fili stessi, alcune linee di forza usciranno dai cilindri, ed allora la trasmissione avverrà in parte nell'aria circostante.

Ciò posto, si propone la seguente questione:

Un dielettrico liquido è separato dall'aria mediante un piano orizzontale, al disotto del quale esso si estende all'infinito in tutte le direzioni; i due fili stanno in un piano orizzontale alla profondità h sotto la superficie del liquido. Qual è allora la velocità con cui si trasmetteranno le oscillazioni elettriche lungo i fili? Anche una soluzione soltanto approssimata potrà venir presa in considerazione, p. es. una in cui h si supponga tanto grande rispetto ad a da esser trascurabili tutte le potenze di $\frac{a}{h}$ superiori alla prima.

15. — Nelle esperienze descritte dal Lecher nella memoria citata nel problema precedente, si sviluppano delle onde elettriche stazionarie nello spazio che circonda i due fili conduttori paralleli. In conseguenza un tubo contenente un gas assai rarificato diventa luminoso, fenomeno che di regola cessa tosto che i due fili vengano uniti con un pezzo di metallo. Sembra però che spostando questo pezzo di congiunzione si possa ottenere per esso una posizione tale che quello spazio ridivenga luminoso. Lecher dà (pag. 852-853) due spiegazioni di questo fenomeno. Secondo la prima, quella certa posizione dovrebb'essere un centro delle onde elettriche, cioè il pezzo di congiungimento dovrebbe collocarsi nel piano perpendicolare ai fili nel quale non esiste forza elettrica. Secondo l'altra spiegazione, a cui Lecher dà la preferenza, si sarebbe in presenza di un fenomeno di co-oscillazioni.

Si domandano delle considerazioni teoriche sulla questione se la prima spiegazione sia errata ed in caso affermativo per quali ragioni, e se poi in ultima analisi essa non coincida colla seconda. Per trattare questo problema si dovranno discutere anche le altre particolarità delle esperienze di Lecher e degli altri fisici che applicarono i suoi metodi.

La Presidenza della Società invita tutti gli scienziati a voler dirigere le loro soluzioni di uno o di più fra questi problemi *prima del 1.° Dicembre 1898*, affrancate, al Prof. D. J. Kortweg (Amsterdam, Vondelstraat 104 f); i membri della Società sono poi pregati di voler inviare ugualmente dei problemi che ad essi sembrino adatti per esser proposti in futuri concorsi a premî. Le altre formalità da osservare negli invî (ed in caso di non osservanza chi spedisce è escluso dal concorso), sono le seguenti:

1.° — Le note da inviarsi devono essere redatte possibilmente in lingua olandese, e scritte con caratteri ben chiari (*non di mano propria* del concorrente). La soluzione d'ogni problema deve costituire una nota a parte, ed i fogli devono essere scritti da un solo lato.

2.° — Le soluzioni dei quesiti proposti, e le nuove proposte di problemi per concorsi, devono essere accompagnate da una lettera suggellata, nella quale sia indicato nome ed indirizzo del mittente, e che porti un motto ripetuto alla fine della soluzione d'ogni problema.

Se un problema proposto non è originale, ma tolto da uno stampato nazionale o estero, ciò dovrà essere indicato nell'atto in cui si fa la relativa proposta.

Digitized by Google

3.° — Nelle soluzioni si dovranno seguire in tutto le indicazioni e le norme che la Presidenza ha creduto opportuno di aggiungere alla proposta de' problemi; restando però concesso ai concorrenti di aggiungere altre soluzioni, altri risultati, osservazioni ecc. dei quali la Presidenza non ha fatto domanda, e che si presentassero alla loro mente nel corso dello studio del problema. Anzi, di tali aggiunte, se avranno qualche merito, sarà tenuto conto nell' aggiudicazione dei premi.

4.° — Il risultato del giudizio su le soluzioni ed i nuovi problemi che saranno inviati secondo questo programma, verrà portato a conoscenza del pubblico nell' Adunanza Generale del 1899. Nell' Adunanza stessa si apriranno le lettere con i nomi degli autori degli invii premiati, le altre verranno bruciate, senza esser aperte. Qualora fra i lavori inviati e relativi alla stessa lettera fossero alcuni soddisfacenti, ed altri no, di questi ultimi non si farà menzione alcuna; e la Presidenza si obbliga riguardo a ciò al più assoluto segreto. Il mittente dei lavori non giudicati degni di premio potrà ottenere dalla Presidenza un estratto del rapporto del giudizio, per quanto riguarda la disapprovazione, qualora ne faccia domanda entro un mese dopo la Adunanza Generale.

5.° — Le soluzioni premiate potranno essere inserite nel « Nieuw Archief voor Wiskunde ».

6.° — Ogni membro che avrà dato risposta soddisfacente a *dieci* dei problemi posti in un anno, o in più anni, acquista con ciò il rango d' un *Membro Benemerito*, e sarà proclamato tale nella Adunanza Generale, subito che, all' apertura delle lettere indicatrici, sarà stato conosciuto il suo nome.

* * *

Medaglia Sylvester. — È annunciata la costituzione di un comitato per raccogliere i fondi che sono necessari affinchè possa venir conferita ogni tre anni una medaglia d'oro, portante il nome di Sylvester, ai matematici più eminenti del mondo intero; l'aggiudicazione verrà fatta dalla Società Reale di Londra senza tener conto della nazionalità dei premiandi. Nel comitato promotore l' Italia è rappresentata da Brioschi e Cremona; la Francia da Hermite, Poincaré, Jordan e Darboux; la Germania da Schwarz, Klein, Fuchs, Gordan e Lindemann; la Svezia da Mittag-Leffler; l'America da S. Newcomb, W. Gibbs, G. Bruce Halsted, ecc. L' esito dell' impresa si può considerare come assicurato sin d'ora, giacchè alla fine del 1897 erano già state raccolte soltanto in Europa più di 500 lire sterline. Tutti gli ammiratori di Sylvester che intendono di prendere parte a tale solenne manifestazione, devono inviare i loro contributi al Tesoriere del comitato Lord Rotschild, London E. C., New Court, St.-Swithin's Lane.

Mario Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1898.

Digitized by Google

LUGLIO, AGOSTO E SETTEMBRE 1898.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

A. VASSILIEF, *Pafuntii Lvovitch Tchébychef et son œuvre scientifique*. §§ IV e V.

Recensioni ed annunzi: G. RICCI. *Lezioni sulla teoria della superficie* [G. L.]. — G. FERRARIS. *Teoria geometrica dei campi vettoriali* [G. L.]. — A. BERTET. *Vita dell'abate F. Faa di Bruno* [G. L.]. — E. CZUBER. *Vorlesungen über Differential- und Integral- Rechnung. I Band* [G. Vivanti].

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Torino. Corso libero sulla storia della Meccanica.* Anno 1897-98 [Dott. Vailati].

Necrologio: *Ermanno Schaptra* [M. Cantor].

Notizie: *Le opere di Erone Alessandrino. — Le opere di Gauss. — Il secondo premio Lobatschewsky. — Il calcolo aritmetico nel Medio Evo. — Contributi recenti alla storia nelle matematiche. — The Theory of Screws. — Una versione di Lobatchewski.*

PAFNUTII LVOVITCH TCHÉBYCHEF
ET SON ŒUVRE SCIENTIFIQUE
par A. VASSILIEF

(Continuazione. Vedi pag. 45).

§ IV.

Interpolation d'après la méthode des moindres carrés. Développement en séries procédant suivant les dénominateurs des reduites. Valeurs limites des intégrales dans le cas où la fonction intégrée est décomposable en deux facteurs.

Porté vers l'étude des fractions continues par ses recherches sur les questions de minima et sur l'intègration des différentielles irrationnelles,

Digitized by Google

Tchébychef en fit bientôt une brillante application à cette importante question de l'interpolation, question qui, d'après la juste remarque faite par M. Laisant dans son nouveau livre sur la philosophie et l'enseignement des mathématiques, constitue l'un des plus intéressants chapitres de la philosophie naturelle. C'est un problème de balistique, proposé à Tchébychef par le comité scientifique de l'administration supérieure de l'artillerie russe, qui le conduisit à porter son attention sur l'interpolation.

Dans le problème de l'interpolation parabolique, il s'agit de trouver un polynôme

$$y = \mathrm{F}(x) = a + bx + cx^2 + \cdots + gx^{m-1} + hx^m$$

donnant pour les $n + 1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable les $n + 1$ valeurs correspondantes de la fonction inconnue $f(x)$ avec une erreur aussi petite que possible. Lorsque m est égal à n, le problème est déterminé; lorsque m est plus petit que n, il cesse de l'être; mais il le devient de nouveau, si l'on ajoute la condition que

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{1}{2} \left(y - f(x_i)\right)^2 \theta^1(x_i)$$

doit être un minimum. Dans ce cas de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés Tchébychef donna pour le polynôme $y = \mathrm{F}(x)$ une formule remarquable dans laquelle entrent les dénominateurs $\varphi_m(x)$ des réduites du développement en fraction continue de la somme

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{\theta^1(x_i)}{x - x_i} = \frac{1}{\alpha_1 x + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 x + \beta_2} - \frac{1}{\alpha_3 x + \beta_3} - \cdots$$

[15, 16]. Cette formule jouit de la propriété importante qu'il n'est pas nécessaire d'en fixer d'avance le nombre des termes et qu'on peut trouver ceux-ci successivement l'un après l'autre, ce qui donne une grande supériorité pratique à la nouvelle méthode. Tous les détails importants pour l'application (les formules recurrentes qui lient les coefficients de la formule, ainsi que les formules pour l'évaluation de l'erreur moyenne quadratique dont la valeur permet de reconnaître le nombre des termes de la formule qu'il faut prendre pour avoir un degré d'exactitude assigné) furent publiés séparément par Tchébychef dans le mémoire [25].

Cette nouvelle application des fractions continues fournit à Tchébychef l'occasion d'approfondir la théorie de ces fractions et de trouver quelques beaux resultats, par exemple, les propriétés remarquables sui-

Digitized by Google

vantes des dénominateurs des réduites $\psi_m(x_i)$:

$$\sum_{i=o}^{i=n} \psi_\mu(x_i)\,\psi_\nu(x_i)\,\theta^2(x_i) = 0,\ (\mu \gtrless \nu)$$

$$\sum_{i=o}^{i=n} \psi_\mu^2(x_i)\,\theta^2(x_i) = \frac{1}{\alpha_{\mu+1}},$$

où $\alpha_{\mu+1}$ est le coefficient de x dans un des quotients incomplets (*).

La formule générale de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés, donnée par Tchébychef, peut être specialisée, en faisant différentes hypothèses particulières sur le choix de la suite des valeurs $x_0, x_1, \ldots . x_n$ ainsi que sur la forme de la fonction arbitraire $\theta^2(x)$.

1.° On peut supposer que les valeurs de l'inconnue forment un continuum linéaire. Alors la somme $\Sigma_i \frac{\theta^2(x_i)}{x - x_i}$ se transforme en une intégrale, le nombre des réduites devient infini, et la formule d'interpolation se transforme en un développement en série infinie.

Pour $\theta^2(x) = dx$, lorsque l'on suppose que $x_0, x_1, \ldots .$ forment un continuum linéaire entre -1 et $+1$, l'on a [16] un développement suivant les fonctions de Legendre X_n.

Lorsque $\theta^2(x)$ est proportionel à $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et que la suite des valeurs $x_0, x_1, \ldots .$ forme un continuum entre -1 et $+1$, on a le développement en série de Fourier, procédant suivant les cosinus des multiples de l'argument.

Ces deux cas bien remarquables se présentent aussi [23], lorsque $x_0, x_1, \ldots .$ forment un continuum linéaire entre $-\infty$ et $+\infty$ et que la fonction $\theta^2(x)$ est proportionelle à $\sqrt{\frac{k}{\pi}}\, e^{-kx^2}$ où à ke^{-kx}.

Enfin Tchébychef s'est arrêté aussi sur le cas spécial où $\theta^2(x)$ est proportionnel à $\frac{1}{(1+x)^\lambda\ (1-x)^\mu}$ et il a consacré le mémoire [38] à la demonstration de la propriété fondamentale suivante des dénominateurs T_m des réduites correspondantes:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n\, T_m}{(1+x)^\lambda\ (1-x)^\mu}\, dx = 0\ (m \lesssim n).$$

(*) Ces formules ont été trouvées aussi par M. Rouché (Journal de l'École Polytecnique, cahier 37).

Digitized by Google

Ces fonctions T_n, envisagées, pour la première fois par Jacobi (*), ont été nommées par Tchébychef « fonctions analogues aux fonctions de Legendre » (**). Elles ont l'importante propriété suivante: l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{Z^2\,dx}{(1+x)^\lambda\,(1-x)^\mu}$, où Z est un polynôme quelconque de degré n, devient un minimum si l'on prend pour Z la fonction T_n, multipliée par un facteur constant. C'est sur cette propriété des fonctions T_n que répose l'étude des polynômes qui s'écartent le moins possible de zéro (voir chapitre II), et qui ont des applications importantes dans la recherche des limites des racines et dans la construction du régulateur a force centrifuge [45, 46].

2.° Dans une autre hypothèse importante, quand on suppose equidistantes et ayant des poids égaux les valeurs connues $f(h)$, $f(2h)$, ... $f(nh)$ de la fonction cherchée, la fonction interpolatrice F (x) est développable suivant les dénominateurs de la fraction continue résultant du développement de l'expression $\frac{1}{x-h} + \frac{1}{x-2h} + \cdots\cdots \frac{1}{x-nh}$. Ces dénominateurs, en prenant $\Delta x = h$, s'expriment, à un facteur constant près, par la formule:

$$\psi_m\,(x) = \Delta^m\,(x-1)\,(x-2)\cdots\cdots(x-m)\,(m+n-1-x)\cdots(m-x)$$

et correspondent dans le calcul inverse des différences finies, comme on le voit d'après leur expression, aux fonctions de Legendre qui sont, comme l'on sait, égales à un facteur constant près, à $\frac{d^m\,(x^2-1)^m}{dx^m}$.

La série obtenue dans ce cas pour la fonction interpolatrice au moyen des valeurs équidistantes et de poids égal de la fonction inconnue, ne laisse rien à désirer, car tous les termes se calculent aisément au moyen des différences de valeurs données. La démonstration de cette formule, qui fut seule publiée pour la première fois en 1858 [21, 24, 25], n'a été donnée [29] qu'en 1864. Dans un mémoire [48] de 1875 cette démonstration a été completée, et les formules elles-mêmes ont été remplacées par d'autres plus commodes pour les applications. Tchébychef s'est arreté aussi dans ce mémoire sur le cas plus général où

(*) *Werke*, Tome VI, p. 185.

(**) On donne plus généralement ce nom aux dénominateurs des réduites dans le développement d'une intégrale de la forme $\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x-z}$ en fraction continue.

Les propriétés fondamentales de ces fonctions sont exposées dans l'intéressant ouvrage de M. Possé: *Sur quelques applications des fractions continues algebriques*. St. Pétersbourg 1886.

Digitized by Google

les poids des résultats sont inégaux et où ils s'expriment au moyen de la fonction

$$\theta^2(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha)\,\Gamma(m-x+\beta)}{\Gamma(x)\,\Gamma(m-x)}.$$

On peut aussi dans ce cas parvenir à des formules élegantes. Tchébychef y completa aussi la démonstration de sa formule d'interpolation dans le cas de valeurs équidistantes [29], ainsi que dans le cas général [25], en démontrant que pour chaque terme successif que l'on ajoute dans la formule d'interpolation on diminue successivement l'erreur moyenne quadratique dont l'expression est facile à évaluer. On peut ainsi reconnaitre immédiatement quel est le nombre des termes de la série qu'il faut prendre pour obtenir un degré d'exactitude prescrit.

Avant de quitter les recherches de Tchébychef sur l'interpolation, nous devons encore mentionner le mémoire [29] consacré a la question de l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations. Tchébychef fit voir dans ce mémoire que lorsque l'on connait la fonction

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre $-h$ et $+h$, et que l'on considère ces valeurs comme equidistantes et infiniment voisines, on peut déterminer les coefficients $A_1, A_2, \ldots A_n$ par la simple addition et soustraction de valeurs de la fonction $F(x)$. Les expressions qui déterminent les coefficients affectés de facteurs constants ont la forme:

$$s\,A_l = \int_{-h}^{\eta_1} F(x)\,dx - \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx + \cdots + (-1)^{\nu} \int_{\eta_\nu}^{+h} F(x)\,dx.$$

Il s'agit alors de déterminer le facteur s ainsi que les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$.

Cette question est résolue par une méthode analogue à celle employée dans le mémoire [20]. Ce sont les dénominateurs des réduites du développement en fraction continue de certaines fonctions qui donnent les équations dont le racines sont:

$$\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\nu.$$

Par exemple dans un cas particulier où il s'agit de déterminer le dernier cofficient A_n pour n impair, $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sont les racines de

Digitized by Google

l'équation :

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(x-\sqrt{x^2-h^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{2}=0.$$

De ces résultats on peut tirer une méthode d'interpolation en observant que si l'on a les valeurs en nombre fini $F(x_1), F(x_2), \ldots F(x_n)$ de la fonction $F(x)$ et qu'à leur aide on évalue les expression approchées des intégrales

$$\int_{-h}^{\eta_1} F(x)\,dx, \quad \int_{\eta_1}^{\eta_2} F(x)\,dx, \ldots\ldots$$

et par conséquent de A_i, on aura pour la fonction $F(x)$ une formule approchée, qui sera en même temps une formule d'interpolation (*). Remarquons que Tchébychef a appliqué la méthode d'interpolation dont nous venons d'exposer l'idée à la détermination de l'orbite d'une planète, mais, malheureusement, nous n'avons sur ce sujet qu'une très courte indication [89].

Revenons à la formule générale trouvée par Tchébychef pour l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés; elle conduit à des inégalités remarquables relatives aux intégrales définies et qui ont été l'objet de nombreuses et intéressantes récherches.

Si l'on suppose que les valeurs $x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots$ forment un continuum linéaire entre a et b et si $\theta^2(x)$ désigne une fonction réelle quelconque, continue ou discontinue, la formule générale de Tchébychef donne pour une fonction $F(x)$ dont on connait les valeurs comprises entre $x=a$ et $x=b$, un développement en série, procédant suivant les denominateurs $\psi_n(x)$ des réduites successives de la fraction continue provenant du développement de l'integrale

$$\int_a^b \frac{\theta^2(z)\,dz}{x-z}.$$

(*) Dans un mémoire récemment publié (*Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation*. Mem. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VIII, Tome VI), M. MARKOF généralise la méthode de Tchébychef au cas où la fonction interpolatrice a la forme

$$A_0\,\psi_0(x)+A_1\,\psi_1(x)+A_2\,\psi_2(x)+\ldots\ldots,$$

par exemple $A_0+A_1\sin x+A_2\cos x+A_3\sin 2x+\ldots\ldots$

Digitized by Google

En décomposant au moyen de cette formule nouvelle deux fonctions quelconques u et v de x et en intégrant le produit $uv\theta^2(x)\,dx$ entre les limites a et b, on trouve pour l'intégrale

$$\int_a^b uv\,\theta^2(x)\,dx$$

une série remarquable qui donne la valeur de cette intégrale au moyen d'intégrales de la forme

$$\int_a^b u\,\psi_n(x)\,\theta^2(x)\,dx, \quad \int_a^b v\,\psi_n(x)\,\theta^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \psi_n^2(x)\,\theta^2(x)\,dx.$$

Lorsque l'on arrête le développement à un terme quelconque, on doit y ajouter un terme compleméntaire dont l'expression à été donnée par Tchébychef dans le mémoire [65]. Ce terme complémentaire jouit des propriétés suivantes: 1.° sa valeur numérique ne peut surpasser le produit KAB, où K est une quantité essentiellement positive, A et B désignent les plus grandes valeurs numériques absolues des dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ pour les valeurs de x comprises entre a et b. 2.° Lorsque les dérivées $\frac{d^n u}{dx^n}$, $\frac{d^n v}{dx^n}$ ne changent pas de signe entre a et b, le terme complémentaire a donc le même signe que le produit $\frac{d^n u}{dx^n}\cdot\frac{d^n v}{dx^n}$ (*).

Lorsque l'on arrête la série de Tchébychef au premier terme on a:

$$\int_a^b u\,v\,\theta^2(x) = \frac{\int_a^b u\,\theta^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v\,\theta^2(x)\,dx}{\int_a^b \theta^2(x)\,dx} + R_1,$$

où R_1 a le même signe que le produit $\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}$, lorsque ces dernières dérivées ne changent pas de signe entre les limites d'intégration. De là résulte immédiatement le théorème suivant dû à Tchébychef:

(*) Les formules de Tchébychef ont été l'objet de mémoires de M. M. ANDREIEF, IMSCHENETZKY, KORKINE, POSSÉ et SONINE. Nous renvoyons pour les travaux russes à nos rapports publiés dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Vol. XV, 1883 (p. 222) et vol. XIX, 1887 (p. 222). Dans un mémoire récemment publié: *Sur quelques inégalités relatives aux intégrales définies* (Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., Série VIII, Vol. VI, M. SONINE publie des recherches étendues sur le calcul approché des intégrales définies, contenant une démonstrations nouvelle et une généralisation des formules de Tchébychef.

Digitized by Google

« Lorsque les fonctions u et v sont simultanément croissantes ou simultanément décroissantes entre les limites 0 et 1 de la variable on a:

$$\int_0^1 u\,v\,dx > \int_0^1 u dx . \int_0^1 v\,dx ;$$

dans le cas contraire on a:

$$\int_0^1 u\,v\,dx < \int_0^1 u dx . \int_0^1 v\,dx . \text{ »} \qquad (*).$$

§ V.

Nouveau genre de problème du calcul des variations. Développement en séries procédant suivant les fonctions R_n. *Minima successifs de l'expression* x - ay - b.

Les travaux relatifs à l'interpolation parabolique d'après la méthode des moindres carrés conduisirent Tchébychef à plusieurs autres études et notamment à celle d'un nouveau calcul analogue à celui des variations.

La question de la détermination d'un polynôme Y sous la condition que la somme $\sum_i \frac{1}{2} \left(Y - f(x_i)\right)^2 \theta^2 (x_i)$ soit un minimum peut être considérée comme un cas particulier de la question plus générale où il s'agit de déterminer un polynôme Y tel que la somme $\sum_{i=1}^{i=n} F(x_i, Y_i', Y_i'', \ldots)$ soit un minimum, Y', Y'', . . . désignant les dérivées du polynôme Y et $Y_i, Y_i', Y_i'', \ldots$ les valeurs de ce polynôme et de ses dérivées pour $x = x_i$. Un résultat remarquable rattache étroitement ce problème au calcul des variations. Si nous désignons pour abréger les dérivées

$$\frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y}, \quad \frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y'}, \quad \frac{d\,F(x, Y, Y', Y'', \ldots)}{d\,Y''} \text{ etc.}$$

respectivement par M, N, P, ... et le produit $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ par $\varphi(x)$, l'expression

$$M\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{d \cdot N \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx} + \frac{d^2 \cdot P \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}}{dx^2} \ldots\ldots\ldots$$

(*) Ce théorème a été publié pour la première fois en 1883 par M. HERMITE dans son *Cours de Faculté des Sciences de Paris* (2.e édition, p. 48) avec une démonstration de M. PICARD. Voir aussi KORKINE, *Sur un théorème de M. Tchébycheff* (Comptes Rendus, T. XCVI).

Digitized by Google

doit être égale à une fonction entière de x, aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^m}$.

Du problème correspondant au maximum et au minimum absolus Tchébychef passe au problème correspondant au maximum et minimum relatifs. Il l'envisage sous la forme la plus générale où il s'agit de rendre maximum ou minimum la somme

$$\Sigma\, \Phi_0(x,\ Y,\ Y',\ Y'',\ \ldots),$$

étendue aux valeurs $a_1, a_2, \ldots$ de la variable x, les coefficients du polynôme Y étant soumis aux conditions

$$\Sigma\Phi_1(x, Y, Y', Y'', \ldots) = \alpha_1,\ \Sigma\Phi_2(x, Y, Y', Y'', \ldots) = \beta_1, \ldots;$$

les sommes ci dessus sont supposées étendues: la première aux valeurs x: $b_1, b_2, \ldots$, la seconde aux valeurs de x: $c_1, c_2, \ldots$ etc. Dans le cas le plus général, le groupe de valeurs $b_1, b_2, \ldots$ est distinct du groupe $c_1, c_2, \ldots$ et distinct de même du groupe $a_1, a_2, \ldots$

Dans un cas spécial où Y n'entre dans les fonctions $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ qu'au second degré et où les dérivées $Y', Y'', \ldots$ n'y entrent qu'au premier degré, avec des coefficients ne dépendant que de x, la question se ramène à la détermination du polynôme Y du degré $m-1$, tel que l'expression

$$u\ Y - v,$$

où u et v sont deux fonctions de x, se réduit à une fonction entière Z de x aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^m}$. Cette question de trouver des polynômes Y et Z tels que l'expression

$$u\ Y - Z$$

diffère le moins possible d'une fonction quelconque v est résolue dans les mémoires [31, 32]. Soit

$$q_0 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots$$

la fraction continue qui provient du développement de la fonction u et soient $\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots$ les réduites de cette fraction continue. Si l'on désigne par E la partie entière d'une fonction, les polynômes Y et Z, tels que l'expression $u\ Y - Z$ diffère le moins possible de la fonction v, seront donnés par les séries suivantes:

$$Y = (Eq_1\, Q_1\, v - q_1\, E Q_1\, v)\, Q_1 - (Eq_2\, Q_2\, v - q_2\, E Q_2\, v)\, Q_2 + \cdots\cdots$$
$$Z = -Ev + (Eq_1\, Q_1\, v - q_1\, E Q_1\, v)\, P_1 - (Eq_2\, Q_2\, v - q_2\, E Q_2\, v)\, P_2 + \cdots$$

Digitized by Google

Ces séries fournissent pour Y et Z des valeurs entières dont le degré est d'autant plus elevé que l'on prend un plus grand nombre de termes; ces valeurs de Y et de Z d'ailleurs sont celles qui rendent la différence $u\,Y - Z$ aussi proche de v que cela peut se faire au moyen des fonctions entières de mêmes degrés que Y et Z, et même au moyen des fonctions de degrés plus élevés, mais inférieurs aux degrés des fonctions que l'on obtient en prenant dans les expressions de Y et de Z un terme de plus. Les valeurs de Y et de Z ainsi obtenues résultent d'un développement remarquable trouvé par Tchébychef pour toute fonction v en une série procédant suivant les puissances descendantes entières de x. Une pareille fonction peut être toujours développée suivant les valeurs des fonctions

$$R_1 = u\,Q_1 - P_1,\ R_2 = u\,Q_2 - P_2,\ \ldots\ R_n = u\,Q_n - P_n,$$

et le développement a la forme suivante:

$$v = Ev + (Eq_1\,Q_1\,v - q_1\,EQ_1\,v)\,R_1 + (Eq_2\,Q_2\,v - q_2\,EQ_2\,v)\,R_2 + \cdots\cdots$$

Dans le cas habituel où les quotients incomplets $q_1, q_2, \ldots\ldots$ sont tous du premier dégré le développement prend la forme:

$$v = Ev + A_1\,L_1\,R_1 - A_2\,L_2\,R_2 + A_3\,L_3\,R_3 - \cdots\cdots,$$

L_n désignant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $Q_n\,v$ suivant les puissances descendantes de x. Pour $v = \frac{1}{x-y}$ on a immédiatement

$$L_n = Q_n(y),$$

d'où

$$\frac{1}{x-y} = A_1\,Q_1(y).\,R_1(x) - A_2\,Q_2(y)\,R_2(x) + A_3\,Q_3(y)\,R_3(x) - \cdots\cdots$$

Cette formule remarquable, donnée dans le mémoire [31], est la généralisation de la série connue de Heine (*):

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\,P_n(y)\,Q_n(x),$$

où P_n et Q_n sont des fonctions sphériques de I et de II espèce. L'analyse employée dans le mémoire [32] est d'une simplicité remarquable; elle repose sur le calcul des parties entières des fonctions,

(*) *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1861, p. 39. Cette série a été donnée pour la première fois dans le mémoire *Theorie der Anziehung eines Ellipsoids* (Crelle's Journ. Bd. 42, 1851). Voir la généralisation remarquable de cette série par POCHHAMMER dans son mémoire *Ueber die Entwickelung von Functionen nach den Integralen einer Klasse von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (Crelle's Journ. Bd. 74).

Digitized by Google

et, quoique parfaitement indépendante de suppositions relatives à la convergence, elle est absolument rigoureuse.

Observons que la solution de la question de trouver les polynômes Y et Z qui font tendre la différence u Y — Z autant que possible vers v a été completée plus tard par Tchébychef dans le mémoire [51].

Une question tout-à-fait analogue peut être posée pour les nombres. On sait que lorsqu'il s'agit de détermine deux nombres entiers x et y tels que la différence $x - ay$, a désignant un nombre incommensurable, tende indéfiniment vers zéro, les nombres x et y sont déterminés par le développement de a en fraction continue. Mais la question de trouver deux nombres x et y tels que la différence $x - ay$ s'approche indéfiniment de b a été posée et résolue par Tchébychef le premier, dans le beau mémoire [33]. Une analyse ingénieuse et profonde conduit au théorème suivant: « a désignant un nombre incommensurable quelconque, il existe une infinité de systèmes de nombres entiers x et y tels que la fonction linéaire

$$x - ay - b,$$

b désignant une constante quelconque, devienne plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2y}$. ». L'expression $m - na$, où m et n sont des nombres entiers, peut donc représenter un nombre réel quelconque avec une approximation aussi grande que l'on veut. La belle et importante application de cette proposition faite par M. Hermite [80] à la théorie des fonctions est aujourd'hui classique.

C'est dans le mémoire [35] que Tchébychef a exposé son nouveau calcul des maxima et minima, qui se distingue du calcul des variations en ce sens que la forme de la fonction Y, tout-à-fait indéterminée dans le calcul ordinaire, est supposée donnée dans ces problèmes d'un nouveau genre. Après avoir exposé les principes généraux de la solution de ces problèmes, il applique ces principes au problème de l'interpolation d'après la méthode des moindres carrés. Dans le cas du minimum absolu il trouve facilement la formule générale de l'interpolation dont nous avons parlé au chapitre précédant; mais il envisage aussi un cas particulier où un des coefficients du polynôme Y doit avoir une valeur assignée, ce qui lui fournit l'occasion d'appliquer ses formules ayant trait aux maxima et minima relatifs. Il donna plus tard une autre application de ces formules dans le memoire [63], où il envisage le rapport de deux intégrales prises pour les mêmes valeurs de la variable. La question ici posée se ramène à la suivante: « Parmi tous les polynômes Z de degré donné et vérifiant l'équation

$$\int_{-1}^{+1} Z^2 \theta(x)\, dx = 1$$

Digitized by Google

trouver le polynôme pour lequel l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} Z^2\, \theta_0\,(x)\, dx$$

devienne un maximum ou un minimum, $\theta\,(x)$ et $\theta_0\,(x)$ étant deux fonctions données ». Cette question est résolue par les formules du mémoire [35] et la solution conduit a une nouvelle application des polynômes de Legendre. L'on a en effet le théorème suivant: « Z désignant un polynôme de degré inférieur à n et ne changeant pas de signe entre $x = -1$ et $x = +1$, la valeur numérique du rapport

$$\int_{-1}^{+1} x\, Z\, dx : \int_{-1}^{+1} Z\, dx$$

ne peut respectivement surpasser la plus grande racine des équations $X_{l+1} = 0$ et $X_{l+1} + X_l = 0$, selon que $n = 2l$ ou $2l - 1$ ».

Comme application de ce théorème Tchébychef donne la limite du rapport entre le segment d'une courbe et le triangle, formé par la courbe et deux droites parallèles aux axes des coordonnées.

(Continua).

RECENSIONI ED ANNUNZI

Lezioni sulla teoria della superficie del Dottor GREGORIO RICCI *professore ordinario nella R. Università di Padova*, Verona-Padova, Frat. Drucker. Litografato, p. 8 + 416. 8° gr.

Il Prof. Ricci, che coltiva da lunghi anni e con ottimi frutti la teoria delle forme differenziali (calcolo differenziale assoluto), dopo di avere segnalate, in alcune memorie speciali, parecchie notevoli applicazioni che essa riceve a problemi di geometria infinitesimale, si è proposto ed è riuscito a dimostrare, coll' opera che noi ora annunciamo, come sopra di quella teoria si possa costruire una completa trattazione delle proprietà infinitesimali della superficie, e ci promette un secondo volume dedicato ad una trattazione congenere delle analoghe proprietà dello spazio ordinario. Ciò basta a provare che la nuova opera dell' egregio professore dell' Università di Padova ha la propria ragione di esistere nella letteratura matematica italiana, malgrado quelle anteriori del Bianchi e del Cesàro, accanto alle quali viene naturalmente a prendere posto. Essa verrà festosamente accolta dai dilettanti di metodi

Digitized by Google

rigorosamente puri, dal momento che l'A. si è sempre attenuto a quell' unità di metodo che di regola si ritiene necessaria ad un' opera scientifica degna di tal nome. Siccome poi l'A. espone completamente in principio le nozioni ed i teoremi sulle equazioni a derivate parziali che gli accade di applicare nel corso delle sue indagini, così l' opera in discorso è accessibile a tutti coloro che hanno esauriti gli studî matematici del primo biennio universitario. Tuttavia può nascere qualche dubbio sui buoni risultati che darebbe *un primo studio* della geometria differenziale fatto esclusivamente colla scorta di essa: tali dubbi, che sono in chi scrive il frutto di propria esperienza, trovano la loro spiegazione e la loro (almeno parziale) giustificazione nelle seguenti ottime osservazioni che togliamo da un' opera recente (1): « Mediante studî troppo particolari, si priva la scienza di tutta la sua portata; ma se lo sviluppo dei metodi generali è dato senza certe cautele, nascono nuovi inconvenienti. Uno scolaro che sia in possesso, in modo completo, dei metodi di cui parliamo e si trovi di fronte ad una questione delle più semplici, ricorre spesso a tali potenti strumenti, invece di studiare il problema che gli è proposto e di applicarvi la sua inteligenza. Sviluppa lunghi calcoli, invoca teorie più o meno elevate per scoprire un risultato che un po' d' attenzione e di logica gli avrebbero permesso di riconoscere immediatamente. È l'immagine tradizionale dell' uomo che adopera una clava per schiacciare una mosca. Perciò è importantissimo di persuadere gli scolari che se i metodi generali sono strumenti preziosi, essi non esonerano dal ragionare, che la sagacia serba sempre un valore considerevole, che la geometria analitica è una scienza geometrica, che vedervi il pretesto a svolgere dei calcoli lunghi è un concetto falso, che la complicazione dell' apparecchio algebrico dev' essere proporzionato alle difficoltà della corrispondente questione di geometria. »

Fatte tali riserve sulla portata didattica del metodo di cui il Prof. Ricci è in parte autore ed è certo l' apostolo più fervente, ci affrettiamo a ripetere che noi poniamo assai alto il valore scientifico dell' opera annunziata. G. L.

GALILEO FERRARIS. *Teoria geometrica dei campi vettoriali come introduzione allo studio della elettricità, del magnetismo, ecc.* Torino, Carlo Clausen, 1897, p. VI+76, 4° (2).

Il Prof. Segre, incaricato di presiedere alla pubblicazione di quest'opera postuma del compianto fisico, avverte in un breve proemio:

(1) LAISANT, *Le mathématique* (Paris, 1898), p. 237.
(2) Estratto dal Vol. XLVII (II Serie) delle *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.*

Digitized by Google

« Lo scritto che qui si pubblica è stato trovato fra le carte di Galileo Ferraris, senza indicazione di titolo. Si sa però che esso avrebbe dovuto costituire come un primo capitolo di un trattato completo d'elettrotecnica e che fu redatto sotto la forma attuale in questi ultimi anni (1894 e 1895). Da un manoscritto più antico, che si proponeva gli stessi fini, risulta che la 1.ª Parte del trattato si sarebbe intitolato così: « Riassunto di nozioni scientifiche che servono di fondamento all'elettrotecnica », ed il 1.° Capitolo di essa: - Preliminari. Definizioni e teoremi generali sui vettori e sui campi di forze ». Nella nuova redazione i campi di vettori sono trattati in modo più generale che in quella più antica. E poichè tanto i concetti da cui si parte quanto i metodi con cui vengono svolti sono essenzialmente geometrici, i risultati che si ottengono possono applicarsi non solo all'elettrotecnica, ma a tutte quelle parti della Fisica in cui compaiono campi di grandezze vettoriali. La trattazione è elementare, per modo che può essere facilmente intesa da tutti; essa ha quelle doti di semplicità e lucidità di esposizione che erano tanto ammirate negli scritti e nelle lezioni dell'illustre Autore ».

Tutto il lavoro è diviso in due capitoli, destinati l'uno alle « Prime nozioni. Operazioni sui vettori », l'altro al « Campo di un vettore ». Quello contiene due paragrafi intitolati il primo « Definizioni e notazioni. Somme di vettori », l'altro « Prodotti di vettori ». Nel secondo capitolo, dopo un nuovo § di definizioni, se ne trovano altri sette intitolati ordinatamente: « Integrale su di una superficie. Divergenza »; « Integrale lungo una linea. Circuitazione »; « Integrale lungo una linea aperta. Potenziale »; « Distribuzioni non circuitali. Forze newtoniane. Vettori newtoniani »; « Casi di discontinuità. Strati »; « Distribuzioni circuitali »: « Sui due modi di definire e di trattare il campo di un vettore ».

A questa nuda indicazione delle materie trattate non aggiungiamo altro, giacchè riteniamo questo cenno sufficiente ad assicurare numerosi lettori all'ultimo scritto di Galileo Ferraris. G. L.

Vita dell'Abate Francesco Faà di Bruno fondatore del Conservatorio di N. S. del Suffragio in Torino, per cura del Can. AGOSTINO BERTEU. Torino, Tip. Suffragio, 8.° picc., p. 436.

Scritto da uno non matematico e destinato a diffondere nel mondo dei credenti l'ammirazione per chi (servendoci della terminologia dell'A.) fu non soltanto l'*uomo della scienza* ma anche l'*uomo della carità* e l'*uomo di Dio*, questo libro otterrà indubbiamente accoglienze oneste e liete per parte di coloro a cui interessa conoscere intimamente l'autore della *Théorie des formes binaires* e più ancora i numerosi di-

Digitized by Google

scepoli che egli ebbe. Ed io — ultimo fra di essi — credo di non andar errato asserendo che la lettura della *Vita* che annunziamo procurerà ai miei antichi compagni d'arme, come cagionò in me, un senso di dolce commozione e pur anche di non piccola sorpresa: giacchè dall'opera del Can. Berteu apprenderanno essere l'azione del Faà di Bruno come matematico ed insegnante una minima parte dell'operosità meravigliosamente multiforme che spiegò questo fedele discepolo di Cauchy durante i sessantatre anni di vita che ebbe.

Dall'illustre casato dei Marchesi Faà di Bruno di Alessandria, addì 7 Marzo 1825, sortiva i natali Francesco, quinto dei dodici figli, il quarto dei quali fu quell'Emilio che finì tragicamente ed eroicamente nell'infausta giornata di Lissa. Compiuti gli studi classici nel riputato Collegio dei Padri Somaschi a Novi Ligure, il 15 Ottobre del 1840 entrò nell'Accademia militare di Torino, e ne uscì luogotenente di stato maggiore ai 18 Agosto 1846. Fece con plauso la campagna del 1848-49 e come ricompensa ai servizi prestati il 10 Marzo 1849 fu promosso capitano. Ritornata la pace, le doti che egli aveva rivelate sul campo di battaglia, fecero pensare a lui come futuro insegnante per le scienze dei Principi Umberto ed Amedeo di Savoja; ed appunto per renderlo più idoneo al disimpegno di tale ufficio, il corpo di stato maggiore lo mandò, nell'Ottobre dello stesso anno, a Parigi onde perfezionarsi nelle matematiche. Ivi rimase sino al 25 Aprile 1851, giorno in cui conseguì il Diploma di Licenza in scienze matematiche. Ma nel frattempo erano stati mutati i progetti che erano stati formulati su di lui; forse il dolore di essere stato ingiustamente messo in disparte, forse l'avere riconosciuto di avere scarse attitudini per la vita militare, forse l'attrativa che su di lui esercitavano i matematici francesi, e probabilmente un po' tutte queste ragioni lo consigliarono a chiedere le proprie dimissioni (che ebbe il 23 Marzo 1853) e riprendere la via di Parigi. Ivi continuò gli studi matematici sotto la guida di Cauchy e Leverrier, e sotto l'amichevole influenza di Moigno ed Hermite; dei frutti da lui raccolti è attestazione la laurea in matematiche che gli conferì la Facoltà delle Scienze di Parigi il 20 Ottobre 1855. Ritiratosi poi a Torino inaugurò nel 1857 in quell'Ateneo un corso libero di Analisi superiore; nel 1860 venne ivi acclamato Dottore aggregato e undici anni dopo (3 Ottobre 1871) fu chiamato a succedere a Felice Chiò come professore straordinario di analisi e geometria superiore. Costituitasi questa disciplina nel 1876 in cattedra autonoma, egli conservò l'insegnamento dell'Analisi superiore sino al 26 Marzo 1888, giorno di sua morte.

Il Faà di Bruno è noto nel mondo matematico, meno pei numerosi articoli sparsi nei più reputati giornali d'Europa e d'America, meno per due opere sulla teoria dell'eliminazione e sul calcolo degli errori, che pel trattato sulle forme binarie. il quale, specialmente nella tra-

Digitized by Google

duzione tedesca che ebbe, è ritenuto da giudici competenti come un' ottima guida per un primo studio in tale importante disciplina.

Ad altra opera di maggior mole egli da tempo attendeva, ma essa rimase a mezzo; è un grande trattato (in tre volumi ed in francese) su la teoria e le applicazioni delle funzioni ellittiche, che egli considerava come il proprio testamento scientifico, ove doveva venire coordinato l'immenso materiale che egli aveva raccolto ed in parte sfruttato nelle sue lezioni. Il progetto di questa grande impresa venne formulato prima della rifioritura che ebbe recentemente in Francia la teoria delle funzioni ellittiche; esso venne in parte eseguito, chè la stampa dell'*opus magnum* del Faà di Bruno, al momento della sua morte era arrivata al 40.° foglio di stampa: ma poi venne abbandonata, non bastando al suo compimento quanto rinvennesi tra i manoscritti lasciati. Benchè io, per la gentilezza del Can. Berteu, abbia in questo momento a me dinnanzi i fogli già impressi, non oso formulare un giudizio sull'ultimo lavoro del mio antico professore; un' opera di matematica non si può, come la Venere di Milo, giudicare da un semplice frammento! Tuttavia mi sembra non si possa revocare in dubbio che certi calcoli complementari ivi eseguiti e certe acute osservazioni ivi esposte, avrebbero valso ad accrescere la stima che i matematici accordavano al Faà di Bruno. E poichè ben pochi son coloro che al pari di me potranno esaminare quei fogli, credo sia opportuno di riferir qui (quasi ultimo omaggio alla memoria del mio venerato Maestro) due osservazioni che egli espose e che meritano di venir salvate dall' inevitabile naufragio che le minaccia.

Una si riferisce ad una espressione data da Jacobi pel moltiplicatore M delle funzioni ellittiche. Mentre nel § 20 dei *Fundamenta nova* sta scritto

$$M = \left\{ \frac{\text{sen coam } 4\,\omega . \text{ sen coam } 8\,\omega \cdots \text{ sen coam } 2\,(n-1)\,\omega}{\text{sen am } 4\,\omega \cdot \text{ sen am } 8\,\omega \cdots \text{ sen am } 2\,(n-1)\,\omega} \right\}^2,$$

il Faà di Bruno notò che nel secondo membro manca il fattore $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$. La medesima correzione venne eseguita da coloro che ripubblicarono i *Fundamenta nova* per incarico dell'Accademia di Berlino. Ma quello che ivi non è fatto è l' analoga correzione per l' espressione di sen am n u; correzione che, sottoposta al giudizio del più illustre analista vivente, fu da lui approvata; infatti, in una lettera al Bruno, scritta il 7 di Agosto 1887, Hermite si esprimeva così: « Recevez mes sincères felicitations, vous avez reconnu et rectifiée de la manière la plus satisfaisante l'inadvertance échappée à Jacobi dans l'expression de *sn* (n*u*) sous forme d'un produit composé des facteurs $sn\left(u + \frac{2mk + 2m'ik'}{n}\right)$. Mais permettez-moi de vous prier de ne point signaler comme fautive la formule dans laquelle le grand géo-

Digitized by Google

mètre n'a commis qu'une inadvertence bien légère; il n'y a de faute que dans la puissance du facteur ± 1, et le respect dù au génie ne permet pas d'y insister trop ». Deferente a questo saggio consiglio il Faà di Bruno, dopo avere esposta la formola esatta, avverte semplicemente in nota: « Dans l'immortel ouvrage, les *Fundamenta*, on trouve a pag. 65 le second membre précédé du signe $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, inadvertance échappée à l'illustre Aucteur ».

Più importante è la seconda delle citate osservazioni. Si riferisce alle trasformazioni quadratiche dell' equazione differenziale (ellittica)

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{p\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Abel si occupò di esse in una lettera diretta a Legendre il 28 Novembre 1828 (*Oeuvres complètes*, ed. Sylow e Lie, T. II, 1881, p. 271-279) ed asserì esservene 18, cioè sei della forma

$$y = \frac{a + b\,x^2}{a' + b'\,x^2},$$

quattro della forma

$$y = \frac{a\,x}{1 + b\,x^2}$$

ed otto della forma

$$y = a\,\frac{A + B\,x + C\,x^2}{A' + B'x + C'\,x^2}.$$

Ora il nostro analista trattando la medesima questione, notò che siccome la data equazione differenziale non si altera cambiando y, λ, p ordinatamente in $-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{\lambda}$, $\lambda\,p$, alle quattro trasformazioni quadratiche del secondo tipo, ne corrispondono altrettante della forma

$$y = \frac{1 + b\,x^2}{a\,x},$$

sicchè in totale le trasformazioni quadratiche serebbero quattro più di quelle scoperte da Abel. Il Faà di Bruno che, modesto qual era, non mancava di chiedere il parere dei più competenti sui propri risultati, sottopose quello testè riferito al giudizio di Cayley e questi, addì 27 Maggio 1883, gli rispondeva dichiarando: « the remark appears to me one of considerable importance ». E tale importanza nessuno vorrà negare; ma quello che rimane ancora da chiarire è la vera ragione della svista di Abel, questione di non lieve importanza perchè il numero 18 è ottenuto dal sommo geometra norvegese facendo $n = 2$ nella espressione $6\,(n+1)$ delle trasformazioni di grado n; è tale espressione in generale errata, oppure per $n = 2$ si presentano delle trasformazioni eccezionali che essa non contempla?

Sono questi problemi che mi sembrano di un alto interesse scientifico e di cui mi è ignota la soluzione; l'additarli non mi parve fuori

Digitized by Google

di luogo in questo articolo consacrato alla memoria di chi alla analisi dedicò tutto il tempo che gli lasciavano le innumerevoli opere di carità, le quali tramanderanno benedetto il suo nome alla più lontana posterità. G. L.

E. CZUBER. *Vorlesungen über Differential- und Integral- Rechnung. I Band.* — Leipzig, Teubner, 1898, XIII-526 p. 8.°

Ai molti trattati di Calcolo infinitesimale pubblicati recentemente in Germania, se n'aggiunge ora uno nuovo, di cui è uscito testè il primo volume. Esso contiene il Calcolo differenziale, e si divide in 6 capitoli.

Il primo capitolo tratta dei numeri irrazionali, delle variabili, e delle funzioni d'una e di più variabili. Nel secondo è esposta la teoria della derivazione delle funzioni d'una variabile; nel terzo quella della derivazione delle funzioni di più variabili, e delle funzioni composte ed implicite. Il quarto capitolo è dedicato alle serie a termini reali o complessi ed ai prodotti infiniti; in particolare vengono considerati gli sviluppi di Taylor e di Mac-Laurin, e in base a questi si definiscono le funzioni elementari d'una variabile complessa e si danno le regole pel calcolo delle espressioni di forma indeterminata. Il quinto capitolo tratta dei massimi e minimi delle funzioni d'una e di più variabili, e il sesto comprende le applicazioni geometriche del Calcolo differenziale.

Quest'ultimo capitolo, che occupa quasi la metà del volume, è trattato con amore particolare, specialmente per quanto riguarda la geometria dello spazio, che qui è assai più ampiamente sviluppata che nella maggior parte dei manuali di Calcolo. Basta accennare ai seguenti argomenti: inviluppi di famiglie di superficie, superficie sviluppabili, superficie polari e superficie evolute d'una curva sghemba, indicatrice di Dupin, linee di livello e di massima pendenza, linee di curvatura, asintotiche e geodetiche.

A parte la separazione del Calcolo differenziale dall'integrale, che sarebbe ormai tempo di abbandonare, e una certa sproporzione — già implicitamente notata — fra la parte teorica e le applicazioni geometriche, nulla troviamo da osservare intorno all'ordine ed alla disposizione della materia. Il linguaggio è sempre chiaro, ed è lasciata larga parte allo sviluppo dei concetti fondamentali che informano il Calcolo ed ai quali è utile risalire al principio di ogni nuova teoria; pregio questo poco comune, giacchè di molti trattati di Calcolo, ottimi sotto altri rapporti, può dirsi in questo senso che in essi *la materia uccide lo spirito.* Ogni teoria è poi accompagnata da una numerosa e ben scelta serie di esempi.

Ed ora dobbiamo aggiungere alcune osservazioni.

Digitized by Google

Il rinnovamento dei principii del Calcolo, avvenuto nell'ultimo mezzo secolo, ne ha mutato completamente l'aspetto, togliendo ad esso gran parte della sua semplicità primitiva. Basta, per persuadersene, confrontare uno dei vecchi trattati, p. es. lo Sturm, con uno di quelli ispirati alle idee moderne. Là tutto corre piano e liscio; la continuità non ha quasi bisogno d'essere definita, la derivata e l'integrale esistono sempre, ogni funzione può rappresentarsi mediante una curva; e tutto ciò è ritenuto così naturale, che non occorre, nonchè dimostrarlo, neppure enunciarlo esplicitamente. Qui invece funzioni discontinue, oscillanti, continue ma non derivabili, funzioni con infiniti massimi e minimi, derivate a destra e a sinistra, estremi oscillatori, e così via; i teoremi complicati di molte condizioni, le dimostrazioni — anche di asserti apparentemente evidenti — lunghe e minuziose. Di fronte a questo stato di cose si presenta tutt'altro che facile il problema di conciliare la semplicità col rigore in un primo insegnamento del Calcolo. I giovani destinati ai Politecnici non s'incontreranno mai, nei loro studi ulteriori, in quei tipi strani di funzioni recentemente scoperti e studiati, e per conseguenza saranno superflue per loro quelle restrizioni che la considerazione di questi nuovi enti ha imposto in molti teoremi fondamentali. Anche per quelli che sono avviati alla carriera scientifica queste parti nuove e più delicate del Calcolo — che dovranno necessariamente essere apprese da essi in uno stadio più elevato dei loro studi — non fanno, in un corso elementare, che accrescere le difficoltà e intorbidare la vista dell'assieme, ed assorbono un tempo che sarebbe assai più utilmente occupato nell'addestrare i giovani nella tecnica del Calcolo. D'altra parte è evidente che, in un insegnamento di matematiche, non si deve, ad alcun costo, rinunziare al rigore pieno ed assoluto. Il giusto mezzo sta, a nostro avviso, nel limitare la trattazione alle funzioni dotate di certe proprietà determinate — continuità, derivabilità, ecc. — avendo cura però di far conoscere, eventualmente anche con esempi, l'esistenza di funzioni che di queste proprietà non godono, e di avvertire che non sempre sono validi incondizionatamente anche per queste i teoremi che si vanno dimostrando per le funzioni speciali considerate. Con ciò non si vien meno alle esigenze del rigore, pur limitando lo studio a quelle funzioni che ordinariamente si presentano nelle matematiche applicate.

Anzichè cercare questo giusto mezzo, l'autore ha preferito rinunciare al rigore in alcuni punti; e noi non possiamo affatto approvare la via da lui seguita.

Accenniamo a due punti fondamentali.

Per definire le funzioni continue, il Czuber (p. 30-31) parte dal concetto di *funzione monotona*, che cioè in un intervallo $\alpha\beta$ prende tutti i valori d'un intervallo AB in senso sempre crescente o sempre de-

Digitized by Google

crescente; la successione di più funzioni monotone costituisce, *per definizione*, una funzione continua. Ora è noto che esistono funzioni continue aventi infiniti massimi e minimi; queste resterebbero escluse da tale definizione.

Le funzioni d'una variabile vengono sempre rappresentate mediante curve (p. es. p. 31), e quelle di due variabili mediante superficie (p. 93), senza avvertire che non tutte le funzioni, anche continue, sono suscettibili di una tale rappresentazione.

Altre inesattezze di minor conto si notano qua e là; ed eccone alcune.

Alla fine della p. 103, l'autore deduce dalla formola:

$$f(x+h, y) - f(x, y) = h f_1(x + \theta h, y)$$

l'altra

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = h f_1(x + \theta h, y+k),$$

senza badare che θ, dipendendo non solo da x e da h, ma anche dai parametri che entrano eventualmente nella funzione f, non resterà in generale invariata quando si muti y in $y + k$.

Le condizioni enunciate nel teorema sull'invertibilità delle derivazioni (pag. 104-105) sono eccessive, giacchè basta supporre l'esistenza e la continuità di una delle derivate miste per dedurne l'esisteuza dell'altra e l'eguaglianza delle due.

A p. 115 manca il teorema che stabilisce le condizioni per l'esistenza della funzione implicita definita da una relazione $f(x, y) = c$. Un'altra lacuna è la mancanza del teorema sulla derivazione per serie, della quale pure si fa uso in un caso speciale (p. 197).

Non può dirsi che il rapporto $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$ a p. 217 tende a zero al tendere di n ad ∞, giacchè può avvenire che θ tenda a zero, nel qual caso quell'espressione è del tipo 1^{∞} e non si può assegnarne il limite senza conoscere la dipendenza fra θ ed n.

Lo stesso dicasi dell'espressione $\frac{1}{(1+\theta)^n}$ a p. 218.

Parimenti è inesatto il dire che $(1+\theta x)^{m-1}$ (p. 217) e $(1+\theta x)^m$ (p. 218) non dipendono da n, giacchè θ varia col variare di n.

Messina, 3 aprile 1898.

G. VIVANTI.

Digitized by Google

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI TORINO. - CORSO LIBERO SULLA STORIA DELLA MECCANICA. - ANNO 1897-98.

1) I primi accenni a speculazioni sistematiche sui fenomeni dell'equilibrio e del moto, negli scritti dei pensatori greci del VI e V secolo a. C. (Anassimandro, Anassimene, Pitagora, Anassagora, Empedocle, Democrito e gli atomisti, Archita Tarentino, Platone).

2) Le idee di Aristotile sulla statica. — Esame dell'operetta sui « Problemi meccanici » a lui attribuita. — Suoi tentativi, non tutti felici, di analizzare e spiegare, mediante la riduzione alla leva (da lui considerata come la « macchina » elementare) il modo d'agire di altri semplici meccanismi (argano, tanaglie, cuneo, ecc.). — Sua enunciazione del principio della leva pel caso di pesi pendenti da una bilancia a braccia disuguali, e suo modo di estenderlo al caso di forze comunque inclinate rispetto all'asta della bilancia. — Suo riconoscimento della dipendenza tra il variare dell'efficacia d'una data forza, applicata a diversi punti d'una leva, e il variare degli spostamenti che tali punti possono subire in corrispondenza a una data rotazione intorno al fulcro. — Primi germi del principio delle velocità virtuali, e ragioni per cui essi rimasero per tanto tempo infecondi.

3) Esame di una dimostrazione del principio della leva, attribuita ad Euclide e conservata in un manoscritto arabo della biblioteca nazionale di Parigi (pubblicato dal Woepke nel 1851). — Analisi dei postulati formulati, o implicitamente ammessi, sui quali essa si basa, riferentisi alle condizioni d'equibrio d'un piano orizzontale rigido girevole intorno a una sua retta, da varî punti del quale pendano pesi — Singolare conformità di detta dimostrazione con quella data da Huygghens nel suo scritto « *Demonstratio de aequilibrio bilancis* »

4) I due libri di Archimede « Sull'equilibrio dei piani. — » Come in essi sia presupposta una trattazione anteriore delle proprietà del « centro di gravità » (definito come un tal punto d'un grave rigido che, da esso sospendendo il grave stesso, questo rimanga in equilibrio in qualunque posizione). — Possibilità di ricostruire tale trattazione utilizzando frammenti, relativi ad essa, conservati in scritti di autori posteriori. — Via probabilmente seguita da Archimede per giungere a scoprire e provare il lemma fondamentale che sta a base della sua classica dimostrazione del principio della leva (cioè che la posizione

Digitized by Google

del centro di gravità d' un corpo non si altera se esso subisce tali deformazioni che non alterino la posizione dei centri di gravità delle sue singole parti.)

5) Il libro d'Archimede « *Sulla Quadratura della parabola* ». — Come il processo da lui ivi seguito per giungere, mediante il principio della leva, a determinare l' area d' un segmento di parabola, differisca solo per la forma e per le notazioni da un' operazione di « quadratura » nel senso moderno della parola, — Applicazioni, che Archimede fa del principio della leva, alla determinazione dei centri di gravità di figure piane. — Come si spieghi la cura costante, che ha Archimede in tali ricerche, di evitare l' impiego di considerazioni infinitesimali dirette, ricorrendo al metodo di riduzione all' assurdo.

6) Il trattato d'Archimede « *Delle cose che stanno sull' acqua* ». — Su quale assioma, relativo alla condizione d' equilibrio d' un liquido pesante, si fondi la sua dimostrazione del principio che un corpo immerso in un liquido non può rimanere in equilibrio se non sussiste uguaglianza tra il suo peso e quello del liquido che esso sposta. — Ragioni che lo possono avere indotto ad adottare l' ulteriore supposizione che la spinta in su subita dal corpo immerso passa pel centro di gravità del liquido spostato. — Suo modo di risolvere nei casi più semplici il problema generale di dividere un dato solido in due parti i cui volumi stiano in un rapporto dato e i cui centri di gravità stiano su una stessa perpendicolare al piano dividente. — Sue ricerche sulla stabilità dell' equilibrio dei galleggianti.

7) Le prime questioni di cinematica. — Il problema generale dell'Astronomia secondo Platone: descrivere i moti dei corpi celesti decomponendoli nel minimo numero di moti rotatori uniformi. — Aristotile enuncia la regola per la composizione di due moti traslatori le cui velocità conservino in ogni istante rapporto costante. — Il paradosso relativo al rotolamento, di due ruote inizialmente concentriche, su due rette parallele. — Applicazione di considerazioni cinematiche alla soluzione di problemi di geometria: il trattato di Archimede: « *Sulle spirali* ».

8) Il *Barulcus* di Erone d' Alessandria. — Peripezie attraverso alle quali tale opera è giunta fino a noi, e suo imperfetto stato di conservazione. — Sua indole essenzialmente pratica. — Regole per calcolare la distribuzione dei carichi sui sostegni. — Descrizione delle cinque « macchine semplici » (leva, argano, taglie, cuneo, vite). — Spiegazione del modo d' agire delle taglie, basata sulla considerazione del ripartirsi della tensione prodotta da un peso sui varî tratti paralleli di fune dai quali esso è sostenuto. — Riconoscimento della proprietà, comune a tutti i meccanismi, di non poter aumentare l' efficacia d' una data forza senza accrescere nella stessa proporzione il

Digitized by Google

cammino che il suo punto d' applicazione deve percorrere per ottenere un dato risultato. — Verifica di questo principio pel caso di macchine rappresentanti la combinazione di più macchine semplici, e sua applicazione ad altre questioni elementari relative al sollevamento di pesi mediante funi.

9) Il libro VIII della « *Collezione matematica* » di Pappo Alessandrino — Frammenti che esso contiene relativi alle proprietà geometriche e cinematiche dei centri di gravità. — Teorema della conservazione del centro di gravità d'un sistema di punti dei quali alcuni stiano fermi ed altri si muovano in linea retta di moto uniforme. — Enunciazione della regola (ritrovata più tardi da Guldino) per calcolare il volume generato da una figura piana che ruoti intorno a una retta del suo piano, quando si conosca la lunghezza dell' arco percorso dal suo centro di gravità. — Strano errore di Pappo sulla condizione d'equilibrio d' un grave sostenuto da un piano inclinato; quali ragioni vi siano per ritenere il passo come spurio o guasto da interpolazioni.

10) L' opuscolo « *De ponderibus* » compilato da Giordano Nemorario su frammento di opere perdute di autori greci (probabilmente di Tolomeo). — Traccia, evidente in esso, di influenze aristoteliche. — Enunciazione della condizione d'equilibrio di due gravi scorrevoli su due piani diversamente inclinati, e congiunti da una fune in modo che uno non possa scendere senza che l' altra s' innalzi. — Si osserva come tra i detti due pesi e le variazioni di livello che essi subiscono, in corrispondenza a uno scorrimento della fune, sussista, nel caso di equilibrio, la stessa relazione che si verifica tra i pesi pendenti in equilibrio dai due estremi d' una leva e gli spostamenti che questi subirebbero in corrispondenza a una data rotazione dell'asta. — Idee erronee sulla stabilità dell'equilibrio delle bilancie, dovute all' assenza, caratteristica, del concetto di « centro di gravità » e a nozioni confuse sull' « inclinazione » d' una curva rispetto a una retta, e sulla misura dell' « angolo di contatto. »

11) Le prime indagini relative alle leggi del moto. — Le ipotesi cosmogoniche di Anassimandro e Anassimene, basate sulla considerazione della forza centrifuga. — Anassagora ed Empedocle asseriscono che anche i corpi celesti sono soggetti all' azione della gravità e che essi « cadrebbero » se si arrestasse il loro rapido movimento di rotazione intorno alla terra. — Aristotile e la distinzione dei moti in « naturali » e « violenti ». — Stratone di Lampsaco ed Epicuro (appoggiandosi a Democrito) riconoscono che tutti i corpi sono « pesanti » e che quelli che, come il fumo o il fuoco, mostrano tendenza a salire fanno ciò a cagione della « violenza » che subiscono da parte dell' aria che, essendo più pesante, esercita su essi la stessa azione che ha l' acqua sui corpi atti a galleggiare.

Digitized by Google

12) Primi germi in Aristotile, del concetto di massa e del principio dell'uguaglianza tra l'azione e la reazione. — Le idee degli Epicurei sull'eguale velocità di caduta di corpi diversamente pesanti cadenti, senza ostacoli. Il passo di Lucrezio in cui esse sono espresse. — Il frammento di Ipparco contenente un tentativo di spiegare l'accelerarsi del moto dei gravi cadenti mediante il contrasto tra l'azione costante del peso, e quella istantanea dovuta alla reazione dell'appoggio. — Conformità tra l'idea di Ipparco e quella per lungo tempo adottata da Galileo sulla stessa questione.

13) Prime proposizioni relative al confronto tra il moto d'uno stesso corpo sotto l'azione rispettiva di differenti forze (pressioni) costanti. — Giordano Nemorario e Leonardo da Vinci asseriscono la proporzionalità delle velocità così acquistate, in eguale intervallo di tempo, alle forze che le producono. — Leonardo enuncia la proposizione che i tempi impiegati da un grave a discendere per due tratti rettilinei compresi tra due orizzontali sono proporzionali alle lunghezze dei detti tratti. — Equivalenza di questa proposizione coll'altra relativa all'uguaglianza tra la velocità acquistata da un grave che scenda da una medesima altezza cadendo per due rette diversamente inclinate all'orizzonte. — Probabile connessione storica tra questa proposizione e il principio aristotelico della dipendenza, della velocità dei gravi cadenti, dal loro *avvicinamento* al centro della terra.

14) Le prime ricerche relative alla determinazione della trajettoria dei gravi lanciati, provocate dall'introduzione delle armi da fuoco. — La teoria della « forza impressa » negli scritti di Leonardo da Vinci e di Cardano — La « *Nova Scienza* » di Tartaglia e il suo tentativo di assoggettare il problema del moto dei projettili a trattazione matematica. — Cause della sua cattiva riuscita.

15) Giovanni Benedetti, nel suo « *Liber speculationum mathematicarum et physicarum* » (Torino 1585), applica per la prima volta il principio d'inerzia per render ragione della « forza centrifuga ». — Paragona il modo d'agire d'una forza costante a quello d'una serie di urti successivi i cui effetti persistono e si sommano e vede in ciò la spiegazione del moto accelerato dei gravi. — Mostra l'errore delle dottrine peripatetiche sul rapporto delle velocità assunte a parità di tempo da uno stesso grave che scenda rispettivamente in due mezzi di differente densità, e determina tale rapporto, giovandosi dei postulati dell'idrostatica d'Archimede e del principio che, a parità d'ogni altra condizione, le velocità sono proporzionali alle forze che le producono. — Riconosce come la velocità di caduta dei gravi nel vuoto non dipende dal peso.

16) La necessità di risolvere le obbiezioni « fisiche », opposte a lui dagli avversari della teoria copernicana conduce Galileo all'« ipotesi »

Digitized by Google

dell'indistruttibilità del moto circolare, comunque concepito, da un grave intorno al centro della terra, e dell' indipendenza di tale moto da qualunque azione del peso. — Come da ciò egli deducesse (come caso limite) l' invariabilità della componente orizzontale della velocità d' un grave lanciato parallelamente all'orizzonte. — Per qual via egli giungesse a scoprire la legge dell' accelerazione dei gravi e da quali idee egli fu guidato alle esperienze su piani inclinati che gli servirono per verificarla, — Egli asserisce per il primo che un grave, lanciato orizzontalmente, « cade » in ogni istante colla stessa velocità con cui cadrebbe verticalmente se fosse abbandonato a se stesso. — Tentativi, di Huyghens e di Torricelli, di dedurre la legge di caduta dei gravi, e il modo d'agire d'una forza costante, da semplici considerazioni d' omogeneità. Importanza di tali tentativi per la storia della fisica.

17) Le prime indagini di Leonardo da Vinci e di Galileo sulla forza della percossa e sulle leggi della comunicazione del movimento per mezzo di azioni a contatto. — Influenza, decisiva a tale riguardo, delle scoperte di Galileo che rendevano possibile la riduzione delle misure di velocità a misure di altezze. — L'ipotesi di Cartesio sulla conservazione della « quantità di moto », e come la sua tendenza a concepire quest' ultima come una « sostanza » gli impedisse di giungere alla completa determinazione delle leggi dell' urto. — Come Huyghens giungesse a tale determinazione; analisi dei postulati sui quali si fonda la sua teoria dell' urto dei corpi elastici. — La scoperta del principio delle forze vive.

18) Huyghens, appoggiandosi ai principi di Galileo trova l' espressione della forza centrifuga in funzione della velocità e del raggio di curvatura della traiettoria. — Come il confronto di tale espressione colla terza legge di Keplero, conducesse Hooke, Wren e Halley, indipendentemente, all' ipotesi di un attrazione del sole sui pianeti, variante in ragione inversa dei quadrati delle loro distanze da esso. — Newton scopre che la stessa relazione sussiste, rispetto alla terra, tra l' accelerazione dei gravi, in prossimità alla sua superficie, e quella da cui è necessario supporre che le luna sia sollecitata onde spiegare il suo moto intorno alla terra. — Come Newton giungesse a dedurre anche la prima e la seconda legge di Keplero, dalla stessa ipotesi sul modo di variare dell'attrazione col variare delle distanze. — Newton estende il principio dell' uguaglianza dell' azione alla reazione anche al caso delle forze a distanza.

19) Le controversie sulla determinazione della lunghezza del pendolo semplice isocrono a un dato pendolo composto. — Huyghens risolve tale problema ricorrendo al principio che l'attitudine, che ha il centro di gravità del pendolo, a riportarsi alla stessa altezza da cui

Digitized by Google

è caduto, persiste anche se, durante l'oscillazione vengono modificati i legami che sussistono tra le varie masse che lo costituiscono. — Le obbiezioni sollevate contro tale trattazione, per l'insufficiente evidenza del postulato in essa assunto, conducono Giacomo Bernoulli a dedurre lo stesso risultato partendo invece dall'ipotesi che se due sistemi di forze, applicate a punti comunque vincolati, producono effetti cinematicamente equivalenti, tali sistemi devono essere tali che, applicati ambedue contemporaneamente, e volto l'uno in senso contrario, mantengano i detti punti vincolati in equilibrio.

G. Vailati.

NECROLOGIO

ERMANNO SCHAPIRA

di Maurizio Cantor (1).

Ermanno Schapira nacque il 16 Agosto 1840 in Erswilken vicino a Tauroggen (Russia). Sino all'età matura egli si dedicò a studi teologici, anzi esercitò l'ufficio di sacerdote, di rabbino, nella sua patria. Le sottigliezze teologiche, in particolare quelle talmudiche stuzzicarono il suo ingegno senza però soddisfarlo; ma un vecchio trattato di geometria, che gli cadde fra le mani, gli rivelò quello che doveva essere il suo avvenire. Nell'anno 1868, a vent'otto anni, Schapira cominciò i suoi studî matematici a Berlino nella « Gewerbe-Akademie ». Fu specialmente Aronhold che lo entusiasmò. Nelle teorie della fisica egli fu istruito sotto la direzione di Quincke, che allora era libero docente a Berlino. Nel 1871 per ragioni private Schapira dovette abbandonare gli studi per divenire commerciante; come tale visse in Odessa sino al 1877. « Ma tu devi dedicarti alla scienza! ». Questo imperativo categorico, come oserei dire, risuonava costantemente nel suo intimo. Nell'anno 1878 egli abbandonò Odessa con una sposa che a lui erasi da poco tempo unita, e che per vent'anni doveva dividere con lui gioje e dolori, difficoltà di carriera e successi. Durante le vacanze autunnali del 1878 egli venne da me per avere un corso privato di lezioni che gli rinfrescassero la memoria delle cognizioni matematiche perdute durante una interruzione di sette anni. Esso si protrasse sino all'inverno; contemporaneamente Schapira seguì il mio corso pubblico sulla Teoria degli integrali definiti e quello di Fuchs sull'Algebra e la Meccanica,

(1) Traduzione dell'elogio pronunciato addì 13 Maggio 1898 in una riunione del « Mathematisches Verein » di Heidelberg.

Digitized by Google

redigendo tutte le lezioni. Fu allora, se non m'inganno, che Schapira entrò nel « mathematisches Verein ». La prima conferenza che egli tenne ivi ebbe per tema un problema di cinematica che eragli stato segnalato da Aronhold; sgraziatamente ho dimenticato in che cosa consisteva. Schapira si addottorò ad Heidelberg nel 1880 e rimase qui altri due anni studiando. Come libero docente (1) Schapira appare la prima volta nell'indice di lezioni del semestre d'inverno 1883-84, con un corso di tre ore settimanali intitolato « Introduzione alla teoria delle funzioni con speciale riguardo alla rappresentazione in serie delle funzioni algebriche », ed uno di un'ora « Teoria ed applicazione delle co-funzioni generali ». Nell'inverno 1887-88 Schapira ottenne il grado di professore straordinario. Indicate così le vicende esterne dell'esistenza di Schapira, è ora mio debito di volgermi al suo svolgimento scientifico.

La prima pubblicazione di Schapira risale al 1880; è il Mischmath Ha-Midoth (2), una geometria ebraica, conservata in un manoscritto della Biblioteca di Monaco. Schapira ha tradotto quello scritto e lo ha corredato di illustrazioni, la maggior parte delle quali si riferiscono ai rapporti tra il Mischmath Ha-Midoth e lavori arabi. Un'attività essenzialmente traduttrice egli manifestò eziandio pubblicando nel 1889 in tedesco gli « Elementi della teoria dei numeri » di Tchebycheff (3).

Le produzioni originali dello Schapira, quelle almeno che vennero pubblicate, trattano di preferenza due temi: cioè le *co-funzioni* e l'*iterazione;* temi che entrambi sono sua proprietà, benchè se ne possano trovare tracce anteriori, che Schapira non mancò di segnalare, per quanto fossero di esigua importanza.

Il concetto fondamentale del primo soggetto può esporsi in poche parole così. Quando si ha una serie di potenze di z, in cui gli esponenti sono numeri interi crescenti, la quale in un certo campo di convergenza rappresenta una funzione $F(z)$, si possono estrarre da questa serie certi termini, ad es. tutti quelli che contengono potenze della forma z^{hn+k}, n e k essendo numeri dati e h un numero intero positivo arbitrario. Tali termini costituiscono una *serie parziale*, e la loro somma una *funzione parziale.* Ma si può fare un cambiamento in $F(z)$ sostituendo z con $r_n^k z$, ove r_n è una radice n^{ma} dell'unità. La funzione risultante chiamasi *funzione circomplessa.* Le

(1) Il suo Habilitationschrift è intitolato: *Darstellung der Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n-ten Grades mit Hilfe von Cofunctionen aus Potenzenreihen* (Heildelberg, 1883).

(2) *Mischmath Ha-Midoth (Lehre von den Massen) aus einem Manuscript der Münchener Bibliothek, bezeichmet Cod. Hebr. 36 etc.* (Zeitschr. f. Math. und Phys., T. XXV, Suppl., p. 1-54).

(3) *Theorie des Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie).* Berlin, 1889.

Digitized by Google

funzioni parziali e le funzioni circomplesse sono *Co-funzioni* le une delle altre perchè presentano fra di loro delle relazioni scambievoli (1).

Il concetto fondamentale dell'iterazione, e per fissare le idee quello dell'iterazione algebrica, consiste in questo:

Un'equazione di grado $n: x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ha n coefficienti $a_1 a_2 \cdots a_n$ e n radici. Si considerino queste n radici come coefficienti di una nuova equazione di grado n, che si chiama *prima equazione iterata*. Da questa se ne deduca similmente una seconda, da questa poi una terza, ecc. Spingendo l'iterazione abbastanza avanti, il processo di deduzione conduce ad un'equazione limite avente radici tutte fra loro eguali.

Sino dal 1880 le cofunzioni formarono argomento della dissertazione di laurea dello Schapira (2), l'iterazione invece data dal 1887 (3). Schapira non ha mai più perduto di vista questi argomenti. Lavorando senz'interruzione egli scrisse — me lo diceva egli stesso — migliaia di pagine, ma sgraziatamente la natura de' suoi lavori era tale che non conduceva a risultati di agevole pubblicazione. Più volte i suoi amici lo pregarono e consigliarono a non pretendere alla generalità massima, ma piuttosto condurre a termine qualche indagine speciale ed assicurarne alla scienza il risultato. Ma indarno. « Sono fatto così, io non posso lavorare altrimenti! ». Questa era la solita risposta a tutte le esortazioni. Ed in fatti pare che non potesse fare diversamente. Egli era una natura straordinariamente fantastica e sanguigna. Quando altri si sarebbero contentati di avere trovata una via degna di essere seguita, a lui si affollavano nuovi pensieri, si presentava lo spettacolo di direzioni svariatissime, ognuna delle quali egli voleva misurare; non di rado egli perdeva così di vista il primitivo scopo, prima di averlo raggiunto. Ed io temo che per la morte dell'amico nostro avvenuta il 9 Maggio di quest'anno, siano condannate a scomparire

(1) V. la Dissertazione di laurea e l'opuscolo *Erweiterung der Begriffe der arithmetische Grundoperationen und der allgemeinen Cofunctionen* (Leipzig, 1882), a cui doveva tener dietro un'opera di maggior lena in tre volumi *(Theorie allgemeiner Cofunctionen)* della quale non venne pubblicato (Leipzig, 1892) che un fascicolo della II Parte del II Volume. Le note: *Bemerkung zur Invariantentheorie* (Jahresber der deutschen Math. Ver., T. II, 1893, p. 65-66), *Zur Integrationen einer Klasse nicht linearer Differentialgleichungen* (Verh. d. Ges. Deutsch. Naturf. zu Nürnberg, 1894) e *Cribrum algebraicum oder die cofunctionale Entstellung der Primzahlen* (Jahresber. der deutsch. Math.-Ver., T. IV, 1896, p. 69-72) contengono applicazioni delle cofunzioni.

(2) *Grundlage zu einer Theorie allgemeine Cofunctionen* (Leipzig, 1881).

(3) *Ueber ein allgemeines Princip algebraischer Iteration*, Vortrag. (Heidelberg), *Bemerkungen zu der Grenzfunctionen algebraischer Iteration* (Zeitschrift f. Math. u. Phys., T. XXXII, p. 310-314). Allo stesso argomento si riferiscono le note più recenti *Ueber symmetische quadratische Formen* (Jahresber. des deutschen Math.-Ver., T. III, 1894, p. 99-102) e *Die Iteration als Fundamentalprocess mathematischer Operationen* (Id., p. 88-93).

Digitized by Google

anche le sue produzioni, molte delle quali di gran valore. Nessuno le conosce perfettamente, nessuno potrà curare la stampa dei manoscritti che egli lasciò così pieni di lacune. Quale tristezza al pensare che tante indagini proseguite per lunghi anni e mai infruttuosamente — tale almeno è la mia convinzione — non riusciranno utili a nessuno! Sento che voi forse disapproverete quest' opinione; ma io non ho potuto tacerla, perchè mi pare di interpretare così i sentimenti dello Schapira, essendo verità ed idealità i fondamenti di tutto l'essere suo. Molti di voi, tutti anzi ad eccezione di quelli appartenenti all' ultimo semestre, lo conobbero personalmente, ed io sono convinto che non dimenticherete mai quello che egli vi disse commosso, con parole apparentemente scherzose ma nel fondo assai serie. « Tenete di conto la vostra gioventù! » fu l' avvertimento che egli vi ha diretto durante un « commers », ed il mezzo per raggiungere tale scopo consisteva, secondo lui, nel vivere nella scienza e per la scienza. In sè stesso egli ha riconosciuto la verità di quanto egli diceva! Giacchè la sua inclinazione ad apprendere, e poi ad insegnare, che lo fece studente una volta a 28 anni ed una seconda a 38, gli ha conservato la gioventù. Giovane era la sua energia al lavoro, la quale spesso cambiava la notte in giorno, senza esigere la trasformazione in notte del giorno seguente. Giovane era il suo entusiasmo per tutto che è nobile e bello. Giovane era il suo sentimento di amicizia ed il suo attaccamento pel « mathematisches Verein » che egli amò sempre profondamente e da di cui egli avrebbe voluto tener lontane tutte le contrarietà, che ad una società come a qualunque individuo, non possono venire risparmiate. Da ultimo però Schapira sentiva il sopravvenire dell' età più di quanto lo comportasse il numero de' suoi anni, tanto che, con vera afflizione, da più di un anno io vedevo in lui un uomo declinante. Anche se la morte improvvisa è il prodotto di una nuova accidentale malattia, un corpo meno indebolito non avrebbe adesso certamente soggiaciuto.

Egli si è spento! Pace alle sue ceneri. Dell' amico noi conserveremo un perenne ricordo.

NOTIZIE

Le opere di Erone Alessandrino. — La celebre « questione Eroniana » da qualche anno accenna ad avviarsi verso una soluzione definitiva, grazie alla scoperta di documenti importanti che ad essa si riferiscono. In primo luogo venne posta fuor di dubbio la esistenza di un commento agli *Elementi di Euclide* composto dal celebre geodeta alessandrino (1): quanto tuttora

(1) P. Tannery, *La geométrie grecque* (Paris 1887, p. 165-176.

Digitized by Google

ne resta si legge in un manoscritto arabo che attualmente si pubblica accompagnato da una traduzione latina (1). In secondo luogo venne trovata la versione araba dell'*Elevatore* e venne già pubblicata per le stampe in uno alla traduzione francese di quel trattato (2). Finalmente il sig. R. Schöne ha recentemente scoperto, in un manoscritto della Biblioteca del Serraglio a Costantinopoli, il testo greco (in tre libri) dei Μετρικά. — Come prodotto di questi importanti ritrovati si annuncia ora una edizione completa delle opere di Erone (testo e traduzione tedesca) che riempirà quattro volumi della « Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana »; presiederanno ad essa due cultori della filologia classica (W. Schmidt e H. Schöne, figlio questi dello scopritore dei Μετρικά) e due orientalisti (il Barone Carra de Vaux ed il D.r Nix). Del I Vol. (ed. Schmidt) — che conterrà la *Pneumatica* e gli *Automi*, nonchè alcuni scritti congeneri di Filone e Vitruvio — è imminente la pubblicazione. Un altro volume (ed. H. Schöne) — che conterrà i Μετρικά e la *Diottra* — è già cominciata la stampa. I due restanti futuri volumi conterranno le altre investigazioni meccaniche e geometriche di Erone. — Ci riserbiamo di tornare a miglior tempo sopra tale argomento; intanto abbiamo voluto dare ai nostri lettori la lieta novella che verranno presto in possesso di una edizione completa delle opere di una fra le più eminenti personalità dell'antico mondo matematico.

* * *

Le opere di Gauss. — Era generalmente noto che i sei volumi pubblicati dallo Schering delle *Opere* di Gauss non contengono tutto quello che il grande matematico lasciò scritto, era intenso il desiderio di tutti i cultori delle scienze esatte di vedere pubblicati anche gli altri frutti delle di lui indagini: onde siam certi verrà festosamente accolto l'annuncio che vien dato della pubblicazione di tre nuovi volumi della collezione anzidetta (dedicati uno all'*Astronomia*, un secondo all'*Analisi*, alla *Teoria dei numeri*, alla *Geometria* ed alla *Geodesia*, un terzo a notizie bio-bibliografiche intorno a Gauss), a cui seguirà come chiusa un volume di indici. E sotto gli auspici della Società scientifica di Gottinga che verrà fatta la nuova pubblicazione; Il Prof. Brendel, successore dello Schering, avrà la direzione generale dei lavori ed in particolare curerà la stampa degli scritti astronomici; il Prof. Fricke si occuperà delle memorie sulla Teoria dei numeri e l'Analisi, il Prof. Stäckel di quelli sulla Geometria, i Prof.ri Börsch e Krüges di quelli sulla Goedesia, ed il Prof. Wiechert di quelli sulla Fisica. Quante piacevoli sorprese preparino i nuovi volumi, si apprende da una interessante nota del Prof. Klein inserita nel I Fascicolo delle *Göttingen Nachrichten*, 1898; nota la quale si chiude con un invito sul quale ci permettiamo di richiamar tutta l'attenzione dei nostri lettori: **Preghiamo tutti coloro che eventualmente**

(1) *Codex Leidensis* 399, 1. *Arabice et latine ediderunt* R. O. Besthorn et J. L. Heiberg (Hauniae, 1893 e 1897).

(2) *Les mécaniques ou l'élévateur de Héron d'Alexandrie publiées pour la première fois et traduites en français par* M. le Baron Carra de Vaux (Paris, 1891).

Digitized by Google

si trovassero in possesso di qualche importante manoscritto relativo a Gauss od alla sua opera scientifica, sian dessi privati o società, di farcelo sapere e di renderci possibile il prenderne conoscenza.

* * *

Il secondo premio Lobatschewsky (500 rubli) verrà conferito il 3 Novembre 1900. Le opere destinate al concorso devono essere stampate, e dirette alla Società fisico-matematica di Kasan non più tardi del 3 Novembre 1899; esse devono riferirsi a questioni geometriche e preferibilmente alla geometria non-euclidea, ed essere scritte in Russo, in Francese, in Tedesco, in Inglese, in Italiano od in Latino.

* * *

Il calcolo aritmetico nel Medio Evo. — Va segnalata ai cultori delle scienze matematiche la pubblicazione del *Cod. Lat. Monac. 11067*, fatta, sotto il patronato dell'Accademia danese delle Scienze, dal Prof. M. Curtze; per chi desidera prendere conoscenza di tale importante contributo alle nostre cognizioni sulla logistica medioevale, ne diamo il titolo preciso: *Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Iohannis de Sacrobosco Commentarius. Una cum algorismo ipso edidit et prefatus est Maximilianus Curtze (Hauniae MDCCCXCVII).*

* * *

Contributi recenti alla storia nelle matematiche. — G. Vailati, *Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXIII; adunanza del 27 Marzo 1898).

F. Amodeo e B. Croce, *Carlo Lauberg ed Annibale Giordano prima e dopo la rivoluzione del 1799* (Archivio storico per le provincie napoletane, Vol. XXIII).

F. Amodeo, *La prima data dell'Accademia Reale di Napoli* (Rend. della R. Accademia delle Scienze fis. e mat. di Napoli, Marzo e Aprile 1898).

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, VIII Heft, Leipzig, Teubner, 1898, 8.°, p. 124 [I. M. Curtze, Ueber einer Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts. II. M. Curtze. De inquisicione capacitatis figurarum. Anonyme Abhandlung aus dem XV. Jahrhunders. III. F. Rosenberger, Die erste Entwicklung der Elektrisirmaschine. IV. F. Rosenberger, Die ersten Beobachtungen über elecktrische Eutladung. V. M. Simon, Zur Geschichte und Philosopie der Differentialrechnung. VI. F. Schmidt, Lebensgeschichte des ungarischen Mathematikers Johan Bolyai de Bolya, k. k. Hauptman im Geniecorps (1802-1860). VII. G. Wertheim, Die Berechnung der irrationalem Quadratwurzeln und die Erfindung der Kattenbrüche. VIII. W. Schmidt, Zur Geschichte des Thermoskops. IX. W. Schmidt, Heron von Alexandria, Konrad Dasypoidius und die Strassburger astronomische Münstertbur. X. W. Schmidt, Heron von Alexandria im 17 Jahrhundert].

* * *

The Theory of Screws. — Questa importante teoria che collega la geometria della retta alla dinamica dei sistemi rigidi, fondata nel 1872 dal celebre astronomo Sir Robert Ball, ha occupato incessantemente per 25 anni il suo creatore. Ora questi, nel presentare addi 8 Novembre 1897 alla

Digitized by Google

R. Accademia Irlandese, la dodicesima memoria sull'argomento, dichiarava che, benchè vi fossero altre questioni interessanti da sciogliere, dal momento che il problema che egli si propose in origine e che ebbe poi sempre in vista, può ormai considerarsi come risolto, egli riteneva opportuno di chiudere la serie delle sue pubblicazioni sopra quella teoria. E poichè tale serie è una di quelle a cui i cultori della meccanica, al presente ed in avvenire, ricorreranno assai spesso, non riuscirà pei lettori, nè inutile, nè discaro il trovarne qui la enumerazione completa: I. *The theory of Screws. A geometrical study of the kinematics, equilibrium, and small oscillations of a rigid body* (Trans. of the R. Irish Academy, Vol. XXV, Dublin 1872). II. *Researches in the Dynamics of a rigid body by the aid of the Theory of Screws* (Phil. Trans. of the Royal Society, London 1874). III. *Screw coordinates and their application to problems in the Dynamics of a rigid body* (Trans. of the R. Irish Academy, Vol. XXV, 1874) (1). IV. *Extension of the Theory of Screws to the Dynamics of any material System* (Id. Vol. XXVIII, 1881). V. *Certain problems in the Dynamics of a rigid system moving in elliptic space* (Ivi). VI. *Dynamics and modern geometry: a new chapter in the Theory of Screws* (Cunningham Memoirs of the R. Irish Academy, No. IV, 1886). VII. *On the plane sections of the cylindroid* (Trans. of the R. Irish Academy, Vol. XXIX, 1887). VIII. *How plane geometry illustrates general problems in the Dynamics of a rigid body with three degree of freedom* (Ivi) (2). IX. *The theory of permanent Screws* (Ivi) X. *The theory of pitch invariants and the theory of chiastic Homography* (Id. Vol. XXX, 1894). XI. *Further development of the relations between impulsive screws and instantaneous screws* (Id. Vol. XXXI, 1896). XII. *The twelfth and concluding memoir on the theory of screws, with a summary of the twelve memoirs* (Ivi).

* * *

Una versione di Lobatchewski. — Il Prof. George Bruce Halsted, ben noto cultore della geometria non-euclidea, in una seduta del Congresso matematico tenuto a Chicago nel 1893, prese impegno di tradurre in inglese i « Nuovi Elementi di Geometria » del Lobatschewsky, i quali non esistevano che nell'originale russo. Il mantenimento di tal promessa fu ritardato sino ad ora, ma sta per divenire un fatto compiuto. Infatti vennero già presentate all'Accademia delle Scienze del Texas e da questa pubblicate la prefazione del traduttore e quella dell'autore; onde è presumibile che ben presto l'intero volume verrà a soddisfare coloro che desiderano di conoscere per intero l'opera riformatrice del celebre professore di Kasan.

(1) I risultati di queste tre memorie si trovano incorporati nel volume intitolato *The Theory of Screws, a study in the dinamics of a rigid body* (Dublin, 1876).

(2) Per quanto contengono le otto prime memorie, v. l'opera del Gravelius *Theoretische Mechanik starrer Systeme auf Grund der Methoden und Arbeiten und mit einem Vorworte von Sir* Robert S. Ball (Berlin, 1889).

Mario Bertolone, Direttore-Gerente.

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1898.

Digitized by Google

OTTOBRE, NOVEMBRE E DICEMBRE 1898.

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA
E STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA DI

GINO LORIA

Editore: **Carlo Clausen**, Torino — Del *Bollettino* si pubblicheranno ogni anno quattro fascicoli di almeno 32 pag. — Prezzo d'abbonamento annuo: Per l'interno L. **6**, per l'estero Fr. **7.50**. Numeri separati L. **2** caduno. — Gli articoli da inserirsi si mandino al *Prof. G. Loria*. Università di Genova.

SOMMARIO

A. VASSILIEF, *Pafnutii Lvovitch Tchebychef et son œuvre scientifique.* §§ VI-IX. *Liste des travaux de* TCHEBYCHEF.

Recensioni ed annunzi: G. DARBOUX. *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, T. I. [E. Daniele]. — G. LORIA. *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, II ed.* [B. Levi]. — L. LEVY. *Precis élémentaire de la theorie des fonctions elliptiques* [G. L.]. — V. DE PASQUALE. *Note all'Algebra complementare del Prof. S. Pincherle. Parte I.* [G. Vivanti]. — G. V. SCHIAPARELLI. *Studio comparativo fra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure* [G. L.]. — G. LAZZERI ed A. BASSANI. *Elementi di geometria, II ed.* [F. Giudice]. — H. WEBER. *Lehrbuch der Algebra.* T. I., II Aufl. [G. L.] — JACOB STEINER'S. *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, II Th., Aufl. [G. L.]. — F. KLEIN. *Conférences sur les mathematiques recueillies par A. Ziwet et traduites par L. Laugel* [G. L.].

Programmi e riassunti di corsi universitarii: *Università di Pisa. Corso di geometria superiore.* Anno 1897-98 [Prof. E. Bertini].

Necrologio: *Paolo Serret.*

Notizie: *Alcuni manoscritti relativi alla geometria greca. Premio della fondazione Bencke. Premio della Società Jablonowski di Lipzia. Il primo centenario di una grande scuola. Temi di matematica posti a concorso dall'Accademia di Madrid. Tema di geometria proposto dall'Accademia del Belgio.*

PAFNUTII LVOVITCH TCHÈBYCHEF
ET SON ŒUVRE SCIENTIFIQUE
par A. VASSILIEF

(Continuazione e fine. Vedi pag. 92).

§ VI.

Valeur limites des intégrales et des sommes.

Dans la formule générale de l'interpolation parabolique (voir chap. IV) les coefficients sont formés par les sommes

$$\sum_i \psi_n(x_i) \cdot \theta^s(x_i) \cdot F(x_i)$$

et, lorsque nous remplaçons $\theta^s(x)$ par une fonction $f(x)$ qui doit rester

Digitized by Google

toujours positive, ces sommes sont evidemment composées linéairement au moyen des sommes

$$\sum_i x_i^0 f(x_i), \sum_i x_i f(x_i), \sum_i x_i^2 f(x_i), \ldots\ldots$$

Ces dernières sommes présentent une grande analogie avec les derivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... Comme ces derivées servent à former les polynômes qui se rapprochent le plus d'une fonction quelconque *dans le domaine d'une valeur* $x = a$, les sommes en question servent à former les expressions qui se rapprochent le plus d'une fonction donnée *dans un intervalle quelconque*. Dans le cas où les valeurs de x forment un continuum linéaire ces sommes remarquables se ramènent aux intégrales

$$\int f(x)\,dx, \int x f(x)\,dx, \int x^2 f(x)\,dx, \ldots.$$

Dans une mémoire de 1873 [44] Tchébychef a donné sans demonstration les resultats qu'il a obtenus relativement aux valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

lorsque, par hypothèse, les valeurs des intégrales

$$(1) \qquad \int_a^b x^k f(x)\,dx = A_k, \quad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

prises pour des intervalles plus étendus ($a < u$, $b > v$) sont données et la fonction $f(x)$ reste positive entre $x = a$ et $x = b$. Si par exemple le nombre de ces intégrales connues est pair ($n = 2m$) les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

ne peuvent être obtenues que dans le cas où u et v vérifient une certaine équation qui dépend des valeurs connues des intégrales (1).

Pour obtenir cette équation ainsi que les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)\,dx$$

Digitized by Google

où u et v doivent vérifier l'équation precitée, on développe l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{z-x}$$

en une série procédant suivant les puissances descendantes de z. Aux termes près de l'ordre $\frac{1}{z^{2m}}$, on a

$$\int_b^a \frac{f(x)\,dx}{z-x} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}.$$

D'autre part si l'on développe la fraction rationelle

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}$$

en fraction continue, cette fraction continue sert à determiner l'équation vérifiée par les valeurs de u, v et les valeurs limites correspondantes de l'intégrale $\int_u^v f(x)\,dx$.

Soit $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ la m-ième réduite de la fraction continue; u et v doivent être les racines z_l et z_n de l'équation $\psi_m(z) = 0$, et les limites des valeurs de l'intégrale $\int_{z_l}^{z_n} f(x)\,dx$ sont les deux résidus intégraux:

$$\left[\frac{\psi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \text{ et } \left[\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}\right]_{z_l-\omega}^{z_n+\omega},$$

ω désignant une quantité positive infiniment petite. Ces formules sont tirées de formules plus générales relatives à l'intégrale $\int_a^v f(x)\,dx$, où v est un valeur quelconque comprise entre a et b. Pour les valeurs limites de cette intégrale on a les formules suivantes:

$$(2)\quad \begin{cases} \int_a^v f(x)\,dx \leqq \left[F(z)\right]_{a-\omega}^{v+\omega} \\ \int_a^v f(x)\,dx \geqq \left[F(z)\right]_{a-\omega}^{v-\omega}, \end{cases}$$

Digitized by Google

où F (z) est une fraction rationelle

$$\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)} = \frac{\varphi_m(z)\, Z - \varphi_{m-1}(z)}{\varphi_m(z)\, Z - \psi_{m-1}(z)},$$

Z est une certaine fonction du premier degré en z, dont l'expression en fonction de v est plus simple lorsque n est pair que lorsque n est impair.

Les formules (2) peuvent facilement se mettre sous la forme

$$(3)\quad \begin{cases} \int_a^v f(x)\,dx < \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} + \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \\ \int_a^v f(x)\,dx > \left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1(z)}\right]_{a-\omega}^{v} - \frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} \end{cases}$$

qui fait voir que le résidu integral $\left[\frac{\Phi_0(z)}{\Phi_1'(z)}\right]_{a-\omega}^{v}$ fournit la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^v f(x)\,dx$ avec une erreur qui ne surpasse pas la valeur numérique de $\frac{1}{2}\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$. De la sorte, lorsque les intégrales (1) coincident pour deux fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$, la différence entre les deux intégrales $\int_a^v f(x)\,dx$ et $\int_a^v f_1(x)\,dx$ ne peut surpasser $\frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)}$.

En s'appuyant sur les formules fondamentales de la théorie des fractions continues (voir chapitre IV), Tchébychef montre [70] que dans le cas considéré

$$(4)\quad \frac{\Phi_0(v)}{\Phi_1'(v)} = \frac{1}{\alpha_1 \psi_0^2(v) + \cdots + \alpha_m \psi_{m-1}^2(v) + \gamma\, \psi_m^2(v)}.$$

Comme exemple, il discute le cas où

$$a = -\infty,\ b = +\infty,\ f_1(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}.$$

Digitized by Google

Dans cette hypothèse on a

$$(5)\quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_1(x)\,dx = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 f_1(x)\,dx = \frac{1}{q^2}, \ldots\ldots \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x)\,dx = \frac{1\ 3.\ 5\ \ldots\ldots\ (2m-3)}{q^{2m-2}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

Si donc les intégrales correspondant à une autre fonction $f(x)$ ont mêmes valeurs, la différence entre les intégrales $\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{v} f^1(x)\,dx$ sera exprimée par la formule (4), où les fonctions $\psi_i(z)$ seront alors les polynômes de M. Hermite. Dans ce cas on peut aisément déterminer pour v quelconque la limite supérieure du second membre de la formule (4); il suffit d'évaluer la limite inférieure de la somme

$$\sum_{i=0}^{i=m-1} T_i = \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\psi_i^2(v)}{\Gamma(i+1)\,q^{2i}}.$$

Une analyse remarquable donne la résolution de la question posée. Comme on a

$$\sum_{0}^{\infty} T_i\,t^i = \theta(t) = \frac{e^{\frac{q^2 v^2 t}{1+t}}}{\sqrt{1-t^2}}$$

il s'agit de déterminer la somme $\sum_{0}^{m-1} T_i$ d'après la valeur connue de la fonction $\sum_{0}^{\infty} T_i\,t^i = \theta(t)$. L'on n'a qu'à rechercher la valeur de

Digitized by Google

l'intégrale $\int_0^{m-1} Y\ t^x\ dx$ au moyen des valeurs connues des intégrales

$$\int_0^{\infty} Y\ t^x\ dx,\quad \int_0^{\infty} x\ Y\ t^x\ dx,\quad \int_0^{\infty} x^2\ Y\ t^x\ dx$$

et l'on y parvient au moyen de la théorie générale des valeurs limites des intégrales. Pour la limite inférieure de la somme $T_0 + T_1 + \cdots\cdots + T_{m-1}$ Tchébychef trouve l'expression

$$M = \frac{2\,(m-3)^5\,\sqrt{m-1}}{3\,\sqrt{3}\,(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{(q^2v^2+1)^5} \qquad (*)$$

De tout ce qui vient d'être dit résulte le théoreme suivant: « Si pour une fonction $f(x)$ qui reste toujours positive les équations (5) ont lieu, la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{v} f(x)\,dx$ reste comprise entre les limites

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{q\,v}{2}} e^{-x^2}\,dx \mp \frac{1}{M}\ » ;$$

nous verrons dans le Chap. suivant une importante application de ce théorème à une des propositions fondamentales de la théorie des probabilités.

Ajoutons encore que le problème aualogue à celui qui consiste à trouver la limite de la somme $\sum_0^{m-1} T_i$, au moyen de la valeur de la somme $\sum_0^{\infty} T_i\,t_i$, a été traité dans le mémoire [69]. Il s'agit dans ce mémoire de la détermination des limites entre lesquelles reste com-

(*) M. Sonine a remplacé cette limite par une autre $\sqrt{\frac{2m-1}{\pi}}$ beaucoup plus simple et de plus indépendante de v. *(Sur l'exactitude de la détermination des valeurs limites des intégrales*, (Mém. de l'Acad. de St. Petersb., 1892).

Digitized by Google

prise la somme d'un nombre quelconque de coefficients successifs de la série

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

ou de la série

$$\frac{B_1}{1^x} + \frac{B_2}{2^x} + \frac{B_3}{3^x} + \cdots,$$

au moyen des valeurs connues de ces séries, tous les termes étant supposés positifs. La question se ramène à celle de trouver les valeurs limites de l'intégrale $\int_0^u F(z)\,dz$, où l'on suppose que $F(z)$ est une fonction qui ne devient pas négative pour $z > 0$ et que la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-tz} F(z)\,dz$$

est connue (*).

Les résultats cités de la théorie des valeurs limites des intégrales ont été donnés par Tchébychef, comme nous l'avons déjà dit, en 1873 sans aucune démonstration. Il s'est contenté d'y ajouter un exemple intéressant de problèmes que l'on parvient à résoudre au moyen de ses formules, à savoir: « étant données la longueur, le poids, le lieu du centre de gravité et le moment d'inertie d'une droite matérielle de densité inconnue variant d'un point à l'autre de la droite, trouver les valeurs limites qui se rapprochent le plus du poids d'un tronçon de cette droite ». C'est à M. Markof que l'on doit la première démonstration des formules de Tchébychef, même généralisées pour le cas de l'intégrale $\int_u^v \Omega(x) f(x)\,dx$. Après la publication du travail de M. Markof (**) Tchébychef publia dans deux mémoires [68, 70] les résultats détailles de ses propres récherches avec leur application au

(*) Les formules de M. Tchébychef ont été démontrées et remplacées par d'autres par M. SONINE *(Une rémarque relative à la lettre de P. L. Tchébychef à Mme Kovalevskt.* Bulletin de l'Acad. de St. Pétersb., 1895).

(**) *Sur quelques applications des fractions continues algébriques.* St.-Petersb. 1881 (en russe). M. POSSÉ a eclairci le passage des formules de M. MARKOF à celles de Tchébychef dans sa monographie: *Sur quelques applications des fractions continues algebriques.* St.-Pétersbourg. 1886. Tout récemment M. MARKOF a publié ses récherches sur des problèmes analogues au problème posé par Tchébychef dans le mémoire: *Nouvelles applications des fractions continues* (Mém. de l'Acad. de St.-Pétersb., Série VIII, Vol. III, 1895). Le problème de Tchébychef est géné-

Digitized by Google

cas où l'une des fonctions a la forme

$$\frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}.$$

Nous avons fait connaître en partie ces résultats. Quant à la méthode qui conduisit Tchébychef a ses résultats, il ne la publia que plus tard en 1891 dans le mémoire [79]. Tchébychef y considère les sommes suivantes:

$$\sum_i x_i^k f(x_i),$$

composées des produits des valeurs positives $f(x)$, $f(x_1)$, ... par les puissances de quantités réelles x_0, x_1, . . . Ces sommes peuvent être régardées comme des cas particuliers de sommes plus générales $\sum_i z_i^k u_i^2$ où quelques uns des carrés u_i^2 peuvent dévenir égaux à zéro. Pour ces sommes Tchébychef résolut le problème de trouver le maximum (ou le minimum) de la somme: $u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \cdots\cdots + u_q^2$ où de la somme: $u_{q_1}^2 + u_{q_1+1}^2 + \cdots\cdots + u_{p-1}^2$ $(q, q_1 < p)$ lorsqu'entre les $2p$ variables:

$$z_0, z_1, z_2, \ldots\ldots z_{p-1},$$
$$u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots u_{p-1},$$

ont donne les équations de condition suivantes

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2 = C_0, \sum_0^p z_i u_i^2 = C_1, \ldots, \sum_0^p z_i^{l-1} u_i^2 = C_{l-1}$$

Au moyen du développement en fraction continue de l'expression

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{C_{l-1}}{x^l}$$

on trouve le système des valeurs z_0, z_1, . . . z_{p-1} qui correspondent au maximum ou au minimum, et les sommes correspondantes s'expriment alors au moyen de résidus intégraux.

Une généralisation de la question considérée dans le mémoire [74] a fait le sujet du dernier mémoire de l'illustre savant [77]. Dans ce

---

ralisé en supposant que la fonction $f(x)$ vérifie les deux inégalités

$$L > f(x) > 0.$$

Voir aussi du même auteur: *Sur une question de minimum proposée par M. Tchébycheff* (Acta mathem. T. VIII, p. 57) et *Sur les valeurs limites des intégrales en leur rapport avec l'interpolation*. 1898.

Digitized by Google

mémoire il suppose que les sommes

$$\sum_0^p z_i^0 u_i^2, \sum_0^p z_i u_i^2, \ldots$$

ne sont pas complètement connues, mais que l'on connait seulement les limites assez restreintes entre lesquelles elles sont comprises. La résolution de cette question générale repose sur les résultats du mémoire [75], où Tchébychef avait ramèné la question de la détermination des réduites du développement en fraction continue d'une série

$$\frac{C_0}{x} + \frac{C_1}{x^2} + \ldots$$

à la question correspondente relative à la série

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots$$

les quantités c_0, c_1, ... différant plus ou moins des quantités C_0, C_1, ...

§ VII.

Théorie des probabilités.

Après les recherches relatives aux questions de minimum et aux expressions approchées des fonctions c'est la théorie des probabilités qui fut le sujet de prédilection du grand géomètre russe. Nous avons vu (chapitre I) qu'un de ses premiers travaux fut un essai d'analyse élémentaire de la théorie des probabilités [3]. « La théorie des probabilités », dit-il dans l'introduction de cet ouvrage, « constitue jusqu'ici une des branches le plus intéressantes et en même temps le plus difficiles de l'analyse transcendante..... En commençant par les équations qui déterminent les inconnues et en terminant par le calcul des valeurs numeriques, nous rencontrons partout l'analyse transcendante la plus élevée. Cependant si nous regardons plus attentivement les problèmes de la théorie des probabilités, nous pouvons nous convaincre qu'il est possible, outre la méthode de l'analyse transcendante, d'en employer une autre fondée sur les seuls principes de l'Algèbre ». En effet Tchébychef n'emploie dans son essai pour la démonstration du théorème de Bernoulli que la série qui représente $log\,(1+x)$. Il expose deux démonstrations du théorème. La premiére donne même

Digitized by Google

l'expression de la valeur de la probabilité que la différence entre le rapport du nombre d'arrivées de l'événement au nombre total des épreuves et la probabilité (chance) de l'événement ne surpasse pas une certaine limite E; seulement l'intégrale employée d'habitude est remplacée chez Tchébychef par la somme des valeurs de la fonction e^{-t^2} prises en nombre suffisamment grand. La seconde démonstration encore plus élémentaire ne donne pas l'expression de la probabilité precitée, mais démontre que, quelque petit que soit E, elle tend vers l'unité quand le nombre total des épreuves augmente indéfiniment. Le principe de cette seconde démonstration est employé par Tchébychef dans une note publiée en 1846 dans le Journal de Crelle [4] pour démontrer un théorème plus général que le théorème de Bernoulli et relatif au cas où la probabilité d'un événement varie d'une épreuve à l'autre. La démonstration que Poisson avait donné de ce théorème nommé par lui « Loi des grands nombres (*) » n'avait pas satisfait Tchébychef qui fit l'observation suivante: « Quelqu'ingénieuse que soit la méthode employée par le celébre geomètre, il reste à être impossible (*sic*) de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse approximative, et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa démonstration n'est pas rigoureuse ». Dans la sienne Tchébychef n'emploie que les considérations les plus élémentaires à savoir, celle de la série donnant $log(1+x)$ et celle de l'expression approchée du produit $1.2...x$.

De même que l'analyse de Poisson, celle exposée par Laplace dans le chapitre de sa *Théorie analytique des Probabilités,* qui traite de la probabilité des erreurs des résultats moyens d'un grande nombre d'observations et des résultats moyens les plus avantageux, ne pouvait pas contenter un esprit aussi rigoureux que celui de Tchébychef (**). L'analyse qu'avait employé Laplace pour démontrer que la méthode des moindres carrés est la plus avantageuse dans le cas d'un grand nombre d'observations, et cela quelle que soit la loi de la probabilité des erreurs, a, comme Bienaymé l'a dit avec raison (***), une beaucoup plus grande portée; la théorie des erreurs n'est en effet qu'un cas particulier de la théorie des valeurs

(*) *Recherches sur la probabilité des jugements.* Chap. IV.

(**) Plusieurs autres auteurs ont exprimé des doutes sur la rigueur de l'analyse de Laplace, par exemple M. LESLIE ELLIS (voir TODHUNTER, *History of the mathematical Theory of Probability.* Cambridge 1865, p. 561) et M. Glaisher. Ce dernier s'est exprimé ainsi: « It is well known that all the proofs that have been given of the method of Least Squares contain, to say the least, some points of difficulty, and on this account any new investigations of the result is necessarily a matter of much interest ». (Mem. of R. Astron. Society. Vol. 39, 1871).

(***) Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés (Journ. de Liouvillé, Série 2e. Tome XII, 1867, p. 160).

Digitized by Google

eventuelles quelconques. En vertu du théorème fondamental de cette dernière théorie, la moyenne arithmétique des valeurs d'un événement quelconque, si le nombre des epreuves augmente indéfiniment, tend avec une probabilité approchant de la certitude vers une valeur constante. Tchébychef donná deux demonstrations de ce théorème que Poisson avait nommé la seconde partie de la loi des grands nombres et au quel Tchébychef donna le nom de théorème des valeurs moyennes. L'une d'elles tout-à-fait élémentaire confirme l'idée tres juste de Bienaymé (*) que si l'on veut se borner à démontrer la méthode des moindres carrés en ce qui touche la combinaison des observations sans calculer la grandeur de l'erreur, et seulement en prouvant que cette méthode opère de manière à la rendre minimum, il ne faut plus d'analyse transcendante ni même de grande contention d'esprit. En effet des transformations algébriques très simples suffisent à Tchébychef pour demontrer le théorème qu'il enonce de la manière suivante: « Si les espérances mathématiques de quantités u_1, u_2, u_3, ... et de leurs carrés u_1^2, u_2^2, u_3^2, ... ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la différence entre la moyenne arithmétique d'un nombre N de ces quantités et la moyenne arithmétique de leurs espérances mathématiques sera moindre qu'une quantité donnée se réduit à l'unité, quand N devient infini » [34]. La loi des grands nombres et le théorème de Bernoulli relatif à la répetition des événements ne sont que de simples corollaires de ce théorème; on les obtient en supposant que chacune des quantités u_i ne peut admettre que deux valeurs: l'unité et zéro.

La demonstration élémentaire donnée par Tchébychef suffit pour revéler l'influence des grands nombres. Mais les calculs numériques de la méthode des moindres carrés où il est question d'estimer la précision des nombres trouvés par cette méthode exigent autre chose; ces calculs sont fondés sur la possibilité de représenter la loi des probabilités des erreurs par la fonction $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h'x^2}$, que Gauss a trouvée être une conséquence de son postulat de la moyenne arithmétique. L'analyse de Laplace a eu pour but de démontrer que pour un grand nombre d'observations quelle que soit la loi de la probabilité des erreurs, celle ci peut être representée par une fonction de la forme indiquée. Tchébychef dans la théorie plus générale des valeurs eventuelles quelconques a remplacé l'analyse donnée par Laplace (**) par une autre fondée sur la théorie des valeurs limites des intégrales.

Supposons que nous ayons les valeurs eventuelles u_1, u_2, ... pour

(*) Loc. cit., p. 16 .
(**) *Théorie analytique des probabilités*. Livre II, chap. 7.

Digitized by Google

lesquelles les espérances mathématiques sont égales à zéro, tandis que les ésperances mathématiques de toutes leurs puissances ne surpassent pas une certaine limite finie. Alors une analyse analogue à celle employée par Laplace et par Bienaymé (*) donne le résultat suivant: « En désignant par $f(x)dx$ la probabilité que

$$\frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{n}}$$

soit compris entre les limites x et $x + dx$, on a, pour $n = \infty$, quelques soient les lois de la probabilité des valeurs eventuelles u_i, l'egalité suivante exacte aux puissances près d'ordre $2m - 1$ d'une quantité arbitraire s

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\, dx = e^{\frac{s^2}{2q^2}}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{q^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^{(2)},$$

$a_i^{(2)}$ désignant l'espérance mathématique du carré de la valeur u_i ». D'après cette égalité les valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx \quad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1)$$

coincident avec les intégrales correspondantes pour la fonction

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{q^2 x^2}{2}}$$

Ce résultat permet d'appliquer le théorème que nous avons cité dans le chap. V, et d'après lequel pour $n = \infty$ et pour m quelconque la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{v} f(x)\, dx$$

peut être remplacée par celle de l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\, dx$$

(*) *Memoire sur la probabilité des erreurs d'apres le méthode des moindres carrés* (Mém. des sav. étrang. T. XV, 1858).

Digitized by Google

avec une erreur qui ne surpasse pas la valeur numérique de $\frac{1}{M}$. Mais $\frac{1}{M}$ tend vers zéro pour m infini, que nous employions l'expression de M donnée par Tchébychef ou bien que nous employions celle donnée par M. Sonine; on obtient donc facilement ce résultat: « Pour $n = \infty$ l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t}^{t'} e^{-t^2} dt$$

représente la probabilité que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{t=n} u_t$$

reste compris entre les limites

$$\frac{\sqrt{2}}{q} t \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{q} t',$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation

$$\frac{1}{q^2} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} a_t^{(2)},$$

que Σu_i reste compris entre les limites

$$t \sqrt{2 \sum_t a_t^{(2)}} \quad \text{et} \quad t' \sqrt{2 \sum_t a_t^{(2)}} \ (*).$$

L'analyse par laquelle Tchébychef parvient à ce théorème, qui peut servir de fondement à la méthode de moindres carrés, sera toujours un de ses plus beaux titres de gloire.

§ VIII.

Série de Lagrange — Mécanique appliquée — Géométrie des surfaces (déformation des plans-tissus) — Mécanismes de Tchébychef.

Les chapitres précédents ont été consacrés aux travaux analytiques les plus importants de l'illustre savant. Il nous reste à mentionner quelques autres recherches du domaine de l'analyse qui ne se

(*) D'après la première démonstration du théorème des valeurs moyennes [34], la probabilité que Σu_t reste comprise entre les limites

$$\pm a \sqrt{\Sigma a_i^{(2)}} \quad \text{surpasse} \quad 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Digitized by Google

rattachent pas aisément aux travaux dont nous avons jusqu'ici rendu compte.

Tel est par exemple un mémoire sur la série de Lagrange [19] où Tchébychef emploie une formule générale d'intégration par parties (*) pour en déduire la série de Lagrange avec son terme complementaire. En appliquant la valeur de ce terme complementaire aux développements de l'anomalie excentrique et du rayon vecteur selon les puissances croissantes de l'excentricité, Tchébychef trouva que ces développements sont toujours convergents si la valeur de l'excentricité est inférieure à la limite $k = 0{,}66274$. C'est ce que Laplace avait trouvé le premier et ce que Cauchy avait demontré par une méthode plus générale. Mais Tchébychef trouva de plus que dans ces développements l'erreur est toujours inférieure au rapport de l'excentricité à 0,66274, élevé à un degré égal au nombres des termes conservés de la série. Nous indiquerons aussi un travail [50] où Tchébychef généralise la formule remarquable de Catalan

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

en y remplacant les numérateurs par les termes d'une série quelconque ce qui donne comme résultat une expression de la constante $4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6}$ au moyen des fonctions $E(a), E(2a), E(3a), \ldots, E(x)$ designant le plus grand nombre entier contenu dans x. Ajoutons encore que M. Hermite dans son *Cours* cite une proposition intéressante de Tchébychef relative au caractère arithmétique des coefficients rationnels de séries qui résultent d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini [79].

Passons maintenant à une série de travaux où les méthodes analytiques générales exposées dans les chapitres précedents sont appliquées à des questions de la mécanique industrielle. Nous avons vu que Tchébychef, dès son plus jeune âge, manifesta de l'interêt pour les applications de la mécanique. Ce goût se reveilla de nouveau lorsqu'en 1849-1851 il professa la mécanique industrielle à l'Université de Saint-Pétersbourg et au Lycée Impérial Alexandre I. En 1852 il fit un voyage dont le but principal était, comme le fait voir un interessant compte-rendu [78], d'étendre ses connaissances en mécanique appliquée en visitant des centres industriels. Le Conservatoire des Arts et Métiers à Paris, le chemin de fer de Paris à Saint-Germain, les

(*) Cette formule a été trouvée aussi par M. BERTRAND (Journ. de Liouville, T. VIII, 1843). Voir son *Calcul intégral*, p. 10.

Digitized by Google

mines et les forges de Lorraine, les manufactures de papier d'Angoulême et leurs turbines, les moulins à vent de Lille et les fabriques d'armes à Châtellerault interessérent vivement le jeune professeur russe; mais ce qu'il cherchait tout particulierement c'était les données nécessaires pour ses recherches sur la théorie des parallélogrammes de Watt. Il poursuivit le même but en Angleterre où il put voir les machines construites par Watt même. C'est après ces voyages qu'il publia son premier mémoire sur la théorie des parallélogrammes dont nous avons parlé dans le chap. II.

Ses études sur le parallélogramme de Watt, continuées » plusieures reprises [28], [60] conduisirent Tchébychef à l'étude générale des systemes articulés. Sous l'influence de Tchébychef, un jeune homme de talent, M. Lipkine, retrouva en 1871 la solution du problème du guidage exact du mouvement rectiligne d'un point qui avait été donné par Peaucellier en 1864. Les belles decouvertes de Peaucellier et de Lipkine et les travaux de Tchébychef relatifs au guidage approché au moyen de systèmes articulés attirèrent sur ces sujets l'attention de plusieurs éminents géomètres (*). Tchébychef d'ailleurs pendant toute sa vie s'interessa aux systèmes articulés; le cas seul du « *trois-barres* » a été l'objet de plusieurs mémoires [37, 52, 56, 57, 58]. C'est à l'aide des systèmes articulés que Tchébychef réalisa le mouvement parallèle à un plan dans sa machine qui marche [91] et dans quelques autres mecanismes; les systèmes articulés peuvent, comme il l'a montré dans le mémoire [67], transformer un mouvement de rotation en un mouvement circulaire ou rectiligne; enfin la règle inventée par Tchébychef pour tracer des arcs de cercle de grand rayon [85] est fondée sur le même principe.

C'est aussi à l'étude des systèmes articulés qu'est intimement lié un problème de la géométrie des surfaces posé par Tchébychef, problème qui nous parait destiné à un grand avenir [53]. (**). Les systèmes articulés se composent de tiges rigides assujeties à se mouvoir dans un même plan de manière à laisser leurs angles variables. Il y a une analogie evidente entre cette théorie des systèmes articulés et celle de la déformation des tissus ou, selon l'expression de Tchébychef de la « coupe des vêtements ». En effet dans toute déformation d'un tissu, formé par deux systèmes des fil qui se croisent à angle droit, le point d'intersection de deux fils ne change pas, et les longueurs

(*) V. LIGUINE. *Liste de travaux sur les systèmes articulés.* (Bulletin de M. Darboux, 2.e série, t. VII, p. 145-160). L'historique et l'exposition de la question des système articulés se trouvent dans les *Leçons de cinématique* de M. KŒNIGS, (Caris 1897) Chap. XI.

(**) Il parait que les travaux interessants de E. LUCAS sur la géométrie du tissage n'ont pas été sans influence sur le problème posé par Tchébychef.

Digitized by Google

de ces fils restent les mêmes. C'est l'angle seul de ces fils qui varie. Il s'agit par conséquent dans cette question, au moyen d'un choix convenable des courbes coordonnées de ramener l'élement linéaire de la surface proposée à la forme

$$du^2 + dv^2 + 2du\,dv\cos\alpha,$$

où α est une fonction quelconque de u et de v. En prenant comme point de depart certaines hypothèses sur la contexture des tissus, Tchébychef donne des formules qui permettent de déterminer les contours qui doivent limiter deux, trois ou quatre morceaux d'étoffe pour que l'on puisse recouvrir le plus exactement possible la surface d'une sphère, pour l'*habiller*, selon l'expression de Tchébychef (*).

Ce ne furent pas les systèmes articulés qui seuls interessèrent Tchébychef. Les recherches sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro, faites eu vue de la théorie des parallélogrammes, trouvèrent aussi leur emploi dans la question du régulateur à force centrifuge. On sait que ce régulateur a pour but de limiter les écarts de la vitesse moyenne lorsque le travail est soumis à des irregularités; à cet effet, le rapport entre les vitesses correspondant aux angles formés par les tiges à boules avec l'axe vertical doit se rapprocher autant que possible de l'unité, ce qui fait voir comment la théorie des fonctions qui s'écartent le moins possible de zéro s'introduit dans cette question (**).

Non seulement Tchébychef à inventé des méthodes mathématiques de la plus haute importance pour la théorie des mécanismes et les a appliquées pour calculer a priori les dimensions de leurs parties, mais encore, épris dès sa jeunesse des travaux mécaniques, comme le furent Newton et Watt, il appliqua ses facultés d'invention à la création de quelques machines absolument nouvelles. La machine arithmétique à mouvement continu, dont un exemplaire se trouve à Paris au Conservatoire des Arts et Métiers, sa règle pour le tracé des arcs de grand rayon qu'il envoyá à l'Exposition de Londres en 1876, le fauteuil-vélocipède, envoyé à l'Exposition de Chicago, resteront toujours comme témoignages de sa faculté d'invention.

Pour terminer cet article nous donnons ici la liste des mécanismes dus à Tchébychef, et qui depuis sa mort font partie du musée de

(*) G. DARBOUX. *Leçons sur la théorie général des surfaces.* Troisième partie, p. 133. Voir aussi: DARBOUX, *Considérations sur les équations differentielles qui se rapportent à la déformation des surfaces.* (Ass. Franc. pour l'avanc. des sciences. Congrès de Paris),

(**) La théorie detaillée du regulateur isochrone de Tchébychef se trouve dans l'ouvrage de M. RESAL, *Traité de Mécanique générale*, (Paris 1876). Tome III, p. 208.

Digitized by Google

mécanique appliquée de l'Université de Saint-Pétersbourg (*); nous y ajoutons l'indication des mémoires correspondants:

1. Parallélogramme de Tchébychef (modèle en bois) [37].

2. Machine arithmétique pour l'addition et la soustraction [62, 81, 82].

3. Règle articulée flexible pour le tracé d'arcs de grand rayon [86].

4. Modèle d'un mécanisme qui marche à la façon du cheval [87].

5. Deux modèles de mécanismes pour la transformation d'un mouvement alternatif en un mouvement continu de rotation (modèle en bois).

6. Fauteuil-vélocipède.

7. Une machine pour la séparation du grain au moyen l'amplitude du jet.

8. Un modèle de presse en bois faite par Tchébychef même.

9. Regulateur a force centrifuge avec boules et contre-poids constant [41, 46].

10. Regulateur a force centrifuge avec boules et contre-poids variable [41, 46].

11. Sept modèles des mécanismes articulés de sa forme discutée dans le mémoire [72] (**).

§ IX.

Considérations générales sur l'oeuvre scientifique de Tchébychef.

Nous espérons que ce court aperçu des travaux de Tchébychef suffit pour donner une notion du caractère général de ses profondes et originales recherches.

Après avoir essayé son talent pour l'analyse mathématique sur quelques problèmes ardus de la théorie des nombres, présentant un grand intèret pour les purs mathématiciens, mais restant sans application concrète, Tchébychef laisse de côte ces questions et, suivant les penchants naturels de son esprit, il porte toute son activité sur la recherche de méthodes nouvelles en mathématiques convenant à la résolution de questions ayant trait aux applications. Tchébychef jusqu'à la fin de sa vie travaille dans cet ordre d'idées, et ses decou-

(*) Nous devons cette liste à l'obligeance du conservateur du musée M. MESTCHERSKY.

(**) Dans une communication faite en 1895 à la Société Physico-mathématique de Kasan, M. KOSLOF, qui travailla avec Tchebychef dans un atelier de mécanique à Saint-Petersbourg, mentionne encore quelques inventions de l'illustre savant savoir: une table qui se meut parallélement, un balancier, un reflecteur, et un canot.

Digitized by Google

vertes le rangent parmi les génies mathématiques les plus originaux de notre epoque. La voie decouverte par lui est si feconde, le nombre des questions qui s'y présentent est si grand que Tchébychef a pu fonder une école nationale de mathématiciens russes formant par la direction de ses travaux un courant original dans la science mathématique du XIX^{ème} siècle.

De même que l'histoire de la philosophie nous présente des époques ou dominent successivement l'idéalisme et l'empirisme, de même les mathématiques pures peuvent aussi être mises en comparaison avec un pendule qui oscille entre la généralisation, l'abstraction et la rigueur logique des principes et entre à l'étude des problèmes concrets et particuliers. C'est ainsi que l'époque d'Euler et de Lagrange où sont posées les bases de nombreuses méthodes mathématiques nouvelles pour la resolution de questions concretes fut suivie par une autre periode à laquelle sont intimement les grands noms de Gauss et de Cauchy et qui est caracterisée au plus haut degré par le rôle joué par la théorie des fonctions d'une variable complexe. Les tendances de cette époque ont trouvé leur représentant typique dans Weierstrass dont toute l'oeuvre scientifique exclusivement consacrée aux mathématique *pures* ne renferme qu'une courte note traitant d'un sujet de physique (*). A l'encontre de Weierstrass l'oeuvre scientifique de Tchébychef et de son école doit être caracterisée par le souci de donner les méthodes applicables aux questions pratiques. La Physique mathématique et ses méthodes générales interessait Tchébychef d'ailleurs aussi peu que la partie abstraite des mathématiques pures. Repondre aux besoins des sciences appliquées en leur fournissant des méthodes mathématiques qui ne dépassent pas la limite de la rigueur qu'on peut atteindre dans ces sciences, tel fut le souci perpetuel de Tchébychef.

Le mécanicien, l'astronome, le physicien dans la résolution définitive des questions dont ils s'occupent ne s'interessent pas pour la plupart aux recherches abstraites sur les propriétés des fonctions ou des nombres; dans la résolution finale de la question lorsqu'il s'agit de passer aux *nombres* définitifs, la fonction transcendante est le plus souvent remplacée pour la commodité du calcul par un polynôme ou par une fraction rationnelle; la pratique ne connait pas non plus la distinction entre le nombre incommensurable et le nombre commensurable qui est si importante dans la mathématique pure. Dans la résolution de toutes les questions pratiques des applications on conçoit ainsi l'importance

(*) Ces idées ont été developpées dans un article publié en 1886 dans le Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan sous le titre: *Du rôle du Professeur Weierstrass dans le développement moderne des mathematiqaes.*

Digitized by Google

des méthodes donnant les valeurs approchées des fonctions et permettant en même temps de trouver la limite de l'erreur inévitable (*). Dans le développement systématique des méthodes de ce genre Tchébychef n'a eu aucun rival ni prédecesseur qui lui fut comparable. On ne peut citer dans cet ordre d'idées que Poncelet qui donna les formules linéaires qui remplacent avec une grande approximation la racine carrée de la somme ou de la différence de carrés.

Dans une conversation que j'eus avec Tchébychef quelques années avant sa mort il exprima ses vues générales sur le but et les problèmes des mathématiques à peu pres dans les termes suivants où se réflète le charme que présentait toujours sa conversation pleine d'esprit. « Les mathématiques » me disait il « ont déjà traversé deux périodes: l'une où les problèmes ont été posés par les dieux (par exemple le problème de la duplication du cube) et l'autre ou c'étaient des demi-dieux, comme Fermat, Pascal et autres qui les posaient; nous sommes aujourd'hui entrés dans la troisième periode où ce sont les besoins de l'humanité qui soulèvent les questions à résoudre ». Dans un discours prononcé en 1856 et consacré au problème des cartes géographiques Tchébychef avait développé les mêmes idées [18]: « Le rapprochement, de la théorie et des applications donne les resultats les plus féconds et ce ne sont pas les seules applications qui en profitent; la science elle même se développe sous l'influence de celles-ci, parceque ce rapprochement fournit de nouveaux sujets d'étude ou de nouveaux points de vue dans anciens sujets d'étude. Si la théorie fait de grands progrès quand les anciennes méthodes recoivent de nouveaux développements ou trouvent de nouvelles applications, elle progresse encore davantage lorsqu'elle découvre de nouvelles méthodes; c'est alors que la science trouve dans les applications un guide sur l'activité *pratique* de l'homme présente une diversité extraordinaire, et pour y repondre, la science doit posséder un grand nombre de méthodes. Mais de toutes ces méthodes, celles-là ont une importance toute particulière qui sont indispensables pour résoudre les différentes modifications du problème qui régit toute cette activité: *comment faut-il se servir de ses moyens pour se procurer le plus grand avantage possible?* »

Ce sont à ces vues générales sur le but des mathématiques que correspondent les principales recherches de Tchébychef: les questions de maximum et de minimum d'un genre different de celles qui conduisirent à l'invention du calcul differentiel et du calcul des variations, la recherche des valeurs approchées des nombres, des fonctions, des

(*) Voir sur ce sujet les idées importantes exprimées recemment par M. Klein (*Evanston Colloquium*, traduction de M. LAUGEL, p, 46-50), M. POINCARÉ (discours de Zurich) et M. LAISANT (*La mathématique*, 1898, p. 145).

Digitized by Google

intégrales, recherches intimement liées à la théorie des fractions continues, enfin ses belles decouvertes dans le domaine de la théorie des probabilités, un des sujets favoris de Tchébychef, qui regardait cette théorie comme « la base de toutes les connaissances fondées sur les observations et les temoignages ».

Au commencement du siècle qui finit Napoleon indiquait à l'Institut de France le programme suivant: « Rendez moi compte », disait il, « des progrès de la science depuis 1789, de son état actuel, et dites-moi quels sont les moyens propres à les activer ». Si les congrès internationaux de mathématiciens qui ont été inaugurés par le congrès de Zurich se posent relativement aux mathématiques modernes ce programme qui repond au voeu des savants de tous les pays et à un besoin scientifique pressant, s'ils publient de tels comptes-rendus, c'est grâce à Lobatchewsky, à Ostrogradsky, à Tchébychef et son école que la science mathématique russe y tiendra sans doute une place honorable.

Kasan, 15 Avril 1888.

LISTE DES TRAVAUX DE P. TCHÉBYCHEF (*)

1. 1843. *Note sur une classe d'intégrales définies multiples.* Journ. de Liouville, t. VIII.
2. 1844. *Note sur la convergence de la série de Taylor.* Journ. de Crelle, t. 28.
3. 1845. *Essai d'une analyse élémentaire de la théorie des probabilités.* Thèse, Moscou (66 p.; en russe).
4. 1846. *Démonstration elémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités* (extrait du mémoire précedent). Journ. de Crelle, t. 33.
5. 1848. *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.* Mém. des savants étrang. prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VI. Journ. de Liouville, t. 17, 1852. Appendice III à la « Théorie des congruences » [voir n. 6].

(*) Cette liste est la réproduction de la liste redigée par M. A. LIAPOUNOF, Professeur à l'Université de Kharkov, modifiée et completée par MM. LORIA et VASSILIEF.

Digitized by Google

6. 1849. *Théorie des congruences.* St. Pétersb. 2ª éd. 1879, (en russe). — *Theorie der Congruenzen.* Deutsch mit Autorisation des Verfassers herausgegeben von H. Schapira. Berlin, 1888. — *Teorica delle congruenze.* Traduzione italiana con aggiunte e note di I. Massarini. Roma, 1895.
7. 1849. *Index systematique et raisonné des œuvres arithmétiques d'Euler* par MM. Bouniakovsky et Tchébychef. Leonh. Euleri Commentationes arithmeticae collectae, vol. I.
8. 1850. *Memoire sur les nombres premiers.* Mém. des sav. étrang., prés. à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII. Journal de Liouville, t. XVII, 1852.
9. 1851. *Sur les formes quadratiques.* Journ. de Liouville, t. XVI.
10. 1851. *Note sur différentes séries.* Ib.
11. 1853. *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (partie I). — Mém. des sav. étr. prés à l'Acad. de St. Pétersbourg, t. VII.
12. 1853. *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles.* Journ. de Liouville, t. XVIII.
13. 1853. *Lettre à M. Fuss sur un nouveau théorème relatif aux nombres premiers contenues dans les formules* $4n + 1$ *et* $4n + 3$. Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XI, 1853.
14. 1854. *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynôme du troisième ou du quatrième degré.* Mém. de l'Acad. de S. Pétersb., IV Série, t. VI, 1857. Journ. de Liouville, Série II, t. II, 1857.
15. 1855. *Sur les fractions continues* (en russe). Mém. scientifiques de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Journ. de Liouville, Série II, t. III, 1858.
16. 1855. *Sur une formule d'Analyse* (communication lue à l'Acad. le 20 octobre 1854). Bulletin Phys.-Mathém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIII. Mélanges Math. et Astron., t. II, livrais. 2 et 3. Journ. de Crelle, t. 53.
17. 1856. *Sur la construction des cartes géographiques.* Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIV, N. 17. Mélanges Math. et Astr., t. II, livr. 5, 1857.
18. 1856. *Sur la construction des cartes géographiques.* Discours écrit pour la séance solennelle du 8 Février 1856 de l'Université de St. Pétersbourg (en russe).
19. 1857. *Sur la série de Lagrange.* Bulletin Phys-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XV, N. 19 et 20. Mélanges math. et astr., t. II, livraison 5. Journal de Liouville, Série II, t. II (avec l'omission du dernier paragraphe).
20. 1857. *Sur les questions de minima qui se rattachent à la repré-*

Digitized by Google

sentation approximative des fonctions. Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série IV, t. VIII, 1858. *Sur les questions de minima* etc. (extrait du mém. précedent). Bulletin Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 10. Mélanges Mathém. et Astron., t. II. livraison 6.

21. 1858. *Sur une nouvelle série* (communication lue le 8 oct. 1858). Bull. Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVII, N. 16. Mélanges Math. et Astr., t. II, livraison 6, 1859.
22. 1858. *Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersb., Série VII, t. I, 1859. *Sur l'interpolation des valeurs fournies par les observations.* (extrait du mém. préced). Bullet. Phys.-Math. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XVI, N. 23. Mélanges Math. et Astron., t. II, livraison 6.
23. 1859. *Sur le développement des fonctions d'une seule variable* (communication lue le 14 octobre 1859). Bulletin de l'Acad. de St. Petersb., t. I. Mélanges Math. et Astronom., t. III, livraison 2.
24. 1859. *Série de Tchebycheff* (extrait du mém. préced.). Nouv. Ann. de Math., t. XVIII, 1859.
25. 1859. *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrées.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VII, t. I.
26. 1860. *Sur l'intégration de la différentielle.*

$$\frac{(x + A)\,dx}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}}$$

Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. III. Mélanges Math. et Astr., t. III, livraison 3. Journal de Liouville, Série II, t. IX, 1864.

27. 1860. *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles* (extrait du mém. préced.). Comptes rendus, t. LI. — Journal de Liouville, II Série, t. IX.
28. 1861. *Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt.* Bulletin de l'Acad de St. Pétersbourg, t. IV. Mélanges Math. et Astr., t. II, livraison 4.
29. 1864. *Sur l'interpolation* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IV (appendice 5).
30. 1865. *Sur l'intégration des differentielles qui contiennent une racine cubique* (en russe). Ib., t. VII (appendice 5).
31. 1866. *Sur les fractions continues algébriques* (Lettre adressée à M. Braschman). Journ. de Liouville, Série II, t. X. — *Sur le developpement des fonctions en series au moyen des fractions continues* (Lettre à M. Braschman) (en russe). Mathematik. Sbornik, t. I.

Digitized by Google

32. 1866. *Sur le developpement des fonctions en séries au moyen des fractions continues.* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. IX (appendice 1).
33. 1866. *Sur une question arithmétique* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. X (appendice 4).
34. 1866. *Des valeurs moyennes* (en russe). Mathematik. Sbornik., t. II, 1867. Journal de Liouville, Série II, t. XII, 1867.
35. 1867. *Maxima et minima des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses derivées* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XII (appendice 3). Journal de Liouville, II Série, t. XIII, 1868 (traduction de M. de Khanikof).
36. 1867. *Sur l'intégration des differentielles les plus simples parmi celles qui contiennent une racine cubique* (en russe). Mathematik. Sbornik, t. II.
37. 1868. *Sur un mécanisme* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XIV.
38. 1869. *Sur les fonctions semblables aux fonctions de Legendre.* (en russe). Ib.
39. 1869. *Sur la determination des fonctions d'après les valeurs qu'elles ont pour les valeurs données de la variable* (en russe). Mathematik. Sbornik, t. IV.
40. 1870. *Sur les parallélogrammes.* Actes du 2.ème Congrès des Naturalistes russes à Moscou.
41. 1871. *Sur le regulateur centrifuge* (en russe). Annuaire de l'Ecole Technique de Moscou, 1871.
42. 1872. *Sur les roues dentées* (en russe). Ib.
43. 1873. *Sur les quadratures.* Journ. de Liouville, Série II, t. XIX, 1873. Association française p. l'Avancement etc., Session de 1873. Les Mondes, journal redigé par Moigno, t. XXX.
44. 1873. *Sur les valeurs limites des intégrales.* Journ. de Liouville, Série II, t. XIX. Assoc. franc. etc., Session de 1873.
45. 1873. *Sur les fonctions qui diffèrent le moins possible de zéro.* Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XX (appendice 1). Journ. de Liouville, Série II, t. XIX.
46. 1873. *Regulateur centrifuge.* Les Mondes, t. XXXI. Assoc. franç. etc., Session 1873.
47. 1875. *Mémoire sur les engrenages.* Cuyper, Revue universelle, t. 38.
48. 1875. *Sur l'interpolation des valeurs equidistantes* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXV (appendice 5).
49. 1875. *Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions.* Bulletin de la Soc. Math. de France, t. III.

Digitized by Google

50. 1876. *Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan et sur une formule arithmétique qui en résulte.* Assoc. franç. etc., Session 1876. Nouv. Correspondance mathém. t. II.
51. 1877. *Sur les expressions approchées linéaires par rapport à deux polynomes* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXX (appendice 4).
52. 1878. *Sur les parallélogrammes le plus simples symétriques par rapport à un axe.* Assoc. franç. etc., Session de Paris, 1878.
53. 1878. *Sur la coupe des vêtements.* Ib.
54. 1878. *Sur une transformation des séries numeriques.* Ib. et Nouv. Corresp. mathém., t. IV.
55. 1878. *Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point.* Bulletin de la Soc. Mathém. de France, t. VI.
56. 1878. *Sur les systemes articulés les plus simples* (en russe). Mathém. Sbornik t. IX, 1879.
57. 1878. *Sur les parallélogrammes formés de trois élements et symetriques par rapport à un axe* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXXIV (appendice 3).
58. 1879. *Sur les parallélogrammes formés de trois élements quelconques* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XXXVI (appendice 3).
59. 1880. *Sur les fonctions qui diffèrent peu de zéro pour des valeurs données de la variable* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL (app. 3).
60. 1881. *Théorème relatif à la courbe de Watt.* — Bulletin des Sciences Math. et Astr., Série II t. 5.
61. 1882. *Sur les parallélogrammes les plus simples qui donnent, avec une approximatiov du quatrième dégré, un mouvement rectiligne* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XL
62. 1882. *Une machine arithmétique à mouvement continu.* Revue scientifique, 2.ème Sem., N. 13.
63. 1882. *Sur le rapport de deux intégrales prises entre les mêmes limites d'intégration* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLIV (appendice 2).
64. 1883. *Sur les expressions approchées des intégrales au moyen d'autres intégrales prises entre les mêmes limites* (en russe). Communications à la Soc. Mathém. de Kharkow, 1882, II.
65. 1883. *Sur une série qui donne les valeurs limites des intégrales dans le cas de la decomposition en facteurs de la fonction integrée* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. XLVII (appendice 4).
66. 1884. *Sur les fractions algébriques qui representent approxima-*

Digitized by Google

tivement la racine carrée d'une variable comprise entre les limites données. Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XII.

67. 1885. *Sur la transformation du mouvement rotatoire en mouvement sur certaines lignes à l'aide des systèmes articulés.* Ib.

68. 1885. *Sur la représentation des valeurs limites des intégrales par des résidus intégraux* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LI (appendice 4). Acta mathém., t. IX, 1886 (traduit par Sophie Kowalevski).

69. 1886. *Sur les sommes composées des coefficients des séries à termes positifs* (lettre adressée à Sophie Kowalevski). Acta mathém., t. IX.

70. 1886. *Sur les résidus intégraux qui donnent des valeurs approchées des intégrales* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV (appendice 2). Acta mathematica, t. XII, 1889 (traduction française de I. Lyon).

71. 1887. *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LV (appendice 6). Acta mathematica, t. XIV, 1891 (traduction française de I. Lyon).

72. 1888. *Sur le système articulé le plus simple propre à produire un mouvement symétrique autour d'un axe* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LX (appendice 1).

73. 1889. *Sur les expressions approchées d'une racine carrée de la variable au moyen des fractions simples* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXI (appendice 1). Acta mathematica, t. XVIII. 1894 (traduction allemande de O. Bäcklund).

74. 1890. *Sur les sommes composées des valeurs de monômes les plus simples multipliés par une fonction qui reste positive* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXIV (appendice 7).

75. 1892. *Sur le développement en fraction continue des series ordonnées suivant les puissances positives d'une variable* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. LXXI (appendice 3).

76. 1892. *Sur les polynômes qui représentent le mieux les valeurs des fonctions fractionnaires les plus simples pour les valeurs de la variable, comprises entre deux valeurs données* (en russe). Mém. de l'Acad. de S. Pétersbourg, t. LXXII (appendice 7).

77. 1894. *Sur les sommes qui dépendent des valeurs positives d'une fonction quelconque* (en russe). Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, Série VIII, t. I, 1895.

(*) 78. 1852. *Note sur le voyage à l'étranger fait par Tchébychef*

(*) Dans les numéros 78-84 nous rassemblons quelques précieuses indications relatives aux travaux de Tchébychef cités dans des ouvrages d'autres auteurs.

Digitized by Google

en 1852 (en russe). Actes de l'Université Impériale de St. Pétersbourg pour l'année 1852. St. Pétersbourg, 1853.

79. *Caractère des coefficients d'une série de la forme*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots\cdots$$

qui résulte d'une fonction composée de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles en nombre fini. Application à la série $\Sigma \frac{x^n}{n^2+1}$. Cours de M. Hermite 4.ème éd., 1891, p. 197. Voir aussi: A. Markof, *Sur les facteurs premiers des nombres de la forme* $1 + 4x^3$. Bullet. de l'Acad. Imperiale de St. Pétersbourg t. III, 55-59.

80. *Théorème sur les minimums successifs de* $x - ay - \alpha$ *pour des valeurs entières de* x *et* y. Cours de M. Hermite. 4.ème éd. 1891, p. 199. Comparer Hermite: *Sur une extension donnée à la theorie des fractions continues par M. Tchébychef.* (Extrait d'une lettre à M. Borchardt). Journ. de Crelle, vol. 88, 1880; cité d'après le Cours de M. Hermite.

81. 1893. *Arithmomètre de Tchébychef.* Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, t. V, 2.ème série. Paris, 1893. (La description de l'arithmomètre est faite par M. M. d'Ocagne).

82. 1894. Von Bool, *Arithmomètre de Tchébychef.* Travaux de la Section physique de la Société des amis des Sciences naturelles de Moscou, t. VII, p. 12-22. (L'article de M. Bool renferme les belles photographies de la machine arithmétique envoyées à l'auteur par Tchebychef, avec des indications complementaires reproduites textuellement dans l'article).

83. *Règle pour la rectification approchée des arcs.* Note écrite de mémoire par M. D. Gravé sur sa dernière conversation mathématique avec Tchébychef. Bullet. de l'Acad. de St. Pétersbourg, t. II, 1895.

84. *Recréations mathematiques par E. Lucas,* t. IV. Paris, 1894. p. 197-204.

(*) 85. 18~6. *Nouveau genre de problèmes du calcul des variations.* — Assoc. franç. etc., Session de 1876.

86. 1876. *Règle pour tracer les arcs circulaires de grand diamètre.* Ib. Comp.: Helmert, *Mittheilung über einige Hülfsmitell zum Zeichen sehr flachen Kreisbogen* (Zeitschr. f. Vermessungswesen, T. VI, 1877); Von Bool, *Les instruments et les appareils pour le dessin géométrique* (en russe), Moscou, 1893.

(*) Les numéros 85-92 se rapportent à quelques communications de Tchébychef dont il ne reste que le titre (quelquefois avec de très courtes indication).

Digitized by Google

87. 1876. *Nouveau mécanisme à mouvement parallèle.* Ib.
88. 1878. *Intégration des equations differentielles du premier ordre.* — Assoc. franç. etc., Session 1878.
89. 1876. *Sur la détermination des orbites des planètes d'après des observations en grand nombre.* Comptes rendus du 5.ème Congrès des naturalistes russes à Varsovie.
90. 1876. *Sur le facteur d'intégrabilité des équations differentielles du premier ordre.* Ibid.
91. 1876. *Sur l'articulation qui donne au plan le mouvement horizontal.* Ibid.
92. 1879. *Sur les parallélogrammes les plus simples.* — Comptes rendus du 6.ème Congrès des naturalistes russes à St. Pétersbourg.
93. 1860. Intégration de l'équation aux différences finies $u_n u_{n-2} = (u_{n-1} - 1)^2$ [remarque insérée dans le mémoire de M. I. Mention: *Sur le problème de Fuss.* Bulletin de l'Acad. de St. Pétersq. Tome I, p. 512].

RECENSIONI ED ANNUNZI

G. Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonées curvilignes.* T. I. Paris, Gauthiers-Villars et fils; 1898. — Pag. VI-338.

L' importanza e la quantità degli studi che, a cominciare da Lamé, si fecero fino a questi ultimi tempi sui sistemi ortogonali, e la relazione di questa con altre teorie matematiche, danno la ragione della pubblicazione del trattato di cui il sig. Darboux presentò da poco il primo volume. Per quanto è permesso giudicare dalla prima parte di un' opera, non ancora interamente licenziata al pubblico, si può affermare che il trattato presente non mancherà di essere un prezioso contributo alla letteratura matematica, che già deve al sig. Darboux le eccellenti *Leçons sur la théorie générale des surfaces.*

Il volume è diviso in due libri, di cui il primo è dedicato allo studio dell' equazione a derivate parziali del 3.° ordine alla quale deve soddisfare il parametro di una famiglia di superficie affinchè questa possa far parte di un sistema triplo ortogonale, ossia, usando la denominazione del D., affinchè sia una *famiglia di Lamé.* Questa equazione di condizione, che fu ottenuta per la prima volta da Cayley nel 1872, è qui costruita con un metodo affatto nuovo, e messa molto elegantemente sotto forma di un determinante del sesto ordine eguagliato a

Digitized by Google

zero. Una forma molto semplice di questa equazione l'aveva già ottenuta alcuni anni prima il Puiseux supponendo gli assi coordinati in una posizione particolare rispetto al sistema triplo, e così trasformata l'equazione fa vedere immediatamente che una famiglia di piani o di sfere è sempre una famiglia di Lamé; partendo da questa considerazione il sig. D. si propone di determinare tutti i sistemi tripli di cui fa parte una famiglia di piani o di sfere data a priori. Nel caso che la famiglia data sia composta di piani il sistema triplo si completa con due famiglie di superficie modanate (moulures); se invece è costituita di sfere, per mezzo di semplificazioni successive si riconduce il problema alla determinazione delle traiettorie ortogonali di una famiglia di piani, che è poi il problema precedente; si può notare l'uso che in questo procedimento fa l'A. del concetto di famiglie *similari* (similaires) di sfere, introdotto dal Rouquet, e delle proprietà relative a queste famiglie. Con questo il problema, che si risolve senza quadrature se la famiglia di sfere non è data, richiede nel caso contrario, per la sua completa risoluzione, l'integrazione di due equazioni di Riccati. Il Cap. II, in cui è fatto lo studio di questi due particolari sistemi tripli, si chiude estendendo ad uno spazio a un numero qualunque di dimensioni il problema di determinare una famiglia di sfere accompagnate dalle loro traiettorie ortogonali; il problema, che fu risolto da Bonnet con sole quadrature, è dal D. semplificato, in quanto ne ottiene la risoluzione senza segni d'integrazione. Lo studio di un integrale particolare dell'equazione fondamentale, fatto nel cap. seguente, conduce a quella famiglia di Lamé le cui superficie si ottengono l'una dall'altra mediante una trasformazione dovuta a Ribaucour, la quale rientra nelle trasformazioni di contatto di Lie che conservano le linee di curvatura. Formando, per esempio, una tal famiglia partendo da una ciclide di Dupin, si ottiene una famiglia di Lamé tutta composta di ciclidi; si può aggiungere che, completando in questo caso il sistema triplo, anche le altre due famiglie risultano formate di ciclidi: si trova così un sistema triplo ortogonale ben noto. A proposito di questo studio l'A. fa osservare che, studiando le più generali trasformazioni di contatto che conservano le linee di curvatura, si presentano naturalmente le coordinate *pentasferiche* che egli definisce nel primo volume delle *Leçons sur la théorie des surfaces*, e di cui fa uso metodico in parecchie questioni dell'opera presente. Ed è appunto valendosi di coordinate pentasferiche che fa lo studio completo dell'integrale particolare esaminato in questo capitolo: le famiglie di Lamé, che corrispondono a questo integrale, si ottengono da una superficie sottoponendola successivamente a trasformazioni di contatto che conservano le linee di curvatura, e si possono caratterizzare dicendo che i cerchi osculatori

Digitized by Google

delle loro traiettorie ortogonali nei punti, in cui queste incontrano una medesima superficie di una famiglia, sono tutti normali ad una medesima sfera. Nel Cap. IV l'A. mette sotto forme diverse l'equazione fondamentale dal 3.° ordine per farne alcune applicazioni, e fra l'altro deduce alcuni teoremi, dovuti a Ribaucour, in relazione coi sistemi ciclici. È pure esposta la forma data all'equazione da M. Lévy, che prende l'equazione di una famiglia di superficie di parametro u sotto la forma $z = z\,(x, y, u)$; e l'applica allo studio delle superficie invariabili di forma che possono, muovendosi, generare una famigiia di Lamé. È degno di nota questo punto, perchè vi si pone in vista un campo di ricerche in cui poco si è riusciti finora a fare; si tratta, cioè, di determinare tutte le superficie che possono generare una famiglia di Lamé prendendo più movimenti diversi. I lavori pubblicati su questo argomento, abbastanza numerosi, ma ancora lontani dal dare dei risultati generali, sono recenti e dovuti a geometri francesi (Adam, Goursat, Cosserat, L. Lévy, Petot). L'equazione del 3.° ordine è pure data nel caso che si assuma l'equazione della famiglia sotto la forma $\varphi\,(x, y, z, u) = 0$, e il D. se ne serve nel capitolo seguente per studiare le quadriche della famiglia $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0$, dove A, B, C sono funzioni di un parametro u. Ricorderò a questo riguardo l'elegante teorema di M. Lévy: condizione affinchè la famiglia suddetta sia di Lamé è che le linee ombilicali siano traiettorie ortogonali della famiglia. Altri interessanti risultati relativi agli ombelichi ed alle linee ombilicali non solo di una famiglia di quadriche, ma più generalmente di una famiglia formata di superficie dotate di un piano di simmetria, sono dovuti al Lévy, a Humbert e allo stesso Darboux.

Le considerazioni relative ai sistemi tripli ortogonali sono estensibili a sistemi contenenti un numero qualunque n di variabili. Questa estensione è fatta nel Cap. VI. Definito un sistema *completamente ortogonale a n variabili* ossia *in uno spazio a n dimensioni* come un sistema di n funzioni $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ di n variabili $x_1 \ldots x_n$, soddisfacenti alle $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni $\sum_{h=1}^{n} \frac{d\alpha_i}{dx_h} \frac{d\alpha_k}{dx_h} = 0$, il primo problema che si presenta è quello di eliminare da queste equazioni tutte le α salvo una, e ricercare tutte le condizioni necessarie e sufficienti cui deve soddisfare quest'unica funzione affinchè quelle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni ammettano una soluzione. Come si vede, è proprio la generalizzazione del procedimento che si tiene nello studio dei sistemi tripli, ed il metodo col quale si eseguisce quell'eliminazione è pure analogo a quello esposto nel Cap. I per il caso di $n = 3$. Nel caso generale in

Digitized by Google

luogo di una equazione sola del 3.° ordine ne compaiono $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$, che si distribuiscono in due gruppi distinti, di cui il primo ne contiene $\frac{1}{2} (n-1)(n-2)$, e il secondo contiene le rimanenti $\frac{1}{6} (n-1)(n-2)(n-3)$: queste ultime esprimono semplicemente che le superficie del sistema ortogonale sono *a linee di curvatura coordinate*, cioè si possono determinare $n-1$ funzioni delle variabili x tali che ognuna si mantenga costante su una linea di curvatura. Le applicazioni che si fanno nel seguito del capitolo mettono in luce l'utilità che presenta lo studio dei sistemi ortogonali a n variabili per le ricerche relative ai sistemi tripli, e fanno vedere come si possa vantaggiosamente fare uso, in questo campo, delle coordinate pentasferiche.

I sei capitoli precedenti costituiscono il primo libro; nel secondo, pure composto di sei capitoli, il sig. D. si propone di dare i metodi generali per la ricerca dei sistemi ortogonali e per l'uso delle coordinate curvilinee che ad essi si connettono. E, affinchè lo studio riesca quanto più generale possibile, comincia a stabilire nel 1.° Cap. le equazioni fondamentali cui devono soddisfare, in un S_n qualunque, certe funzioni (le β_{ik} di Darboux), composte mediante i parametri delle superficie formanti il sistema ortogonale. In queste equazioni rientrano come caso particolare quelle dedotte da Lamé pei sistemi tripli, e la loro integrazione conduce alla determinazione dei sistemi ortogonali che danno al quadrato dell'elemento lineare dello spazio una forma assegnata $ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + \ldots + H_n^2 d\rho_n^2$. Il metodo indicato è la generalizzazione di quello di Lamé, e fu già esposto dal D. in due Memorie pubblicate nelle *Annales de l'Ecole normale*. Il servizio che rendono i sistemi ortogonali a n variabili nel dedurre i sistemi ortogonali ad un numero di variabili minore, ed in particolare nella ricerca dei sistemi tripli, è qui messo bene in evidenza, come pure il loro impiego nel determiuare in un S_n le più generali superficie a linee di curvatura coordinate.

La teoria del triedro mobile, sviluppata dall'A. nelle *Leçons sur les surfaces* è utilizzata nel Cap. II per studiare le proprietà dei sistemi tripli ortogonali; naturalmente il sig. D. è costretto a estendere la teoria imaginando il moto del triedro dipendente da tre parametri e non da due soli, come nel caso delle superficie, ma quell'estensione si fa senza difficoltà. Lo studio del triedro mobile permette poi anche di estendere in un altro senso le relazioni differenziali, trovate da Lamé, fra i coefficienti del quadrato dell'elemento lineare dello spazio riferito ad un sistema triplo ortogonale; permette, cioè,

Digitized by Google

di dedurre quelle relazioni quando si assuma un sistema di coordinate oblique qualunque.

Una volta date le equazioni fondamentali da cui dipende la ricerca dei sistemi ortogonali, non rimane che applicarle a casi speciali, ed è quello che fa il D. nei capitoli seguenti. E anzitutto fa lo studio di un problema che fu trattato da Lamé nelle sue *Leçons sur la théorie des coordonées curvilignes etc.* È noto dalla teoria del calore che in un mezzo solido omogeneo sono possibili tre stati differenti di equilibrio termico per i quali la temperatura si mantiene costante o su una famiglia di ellissoidi, o su una di iperboloidi ad una falda, o su una di iperboloidi a due falde: tutte queste quadriche sono omofocali, e le tre famiglie formano un sistema ortogonale. Dall'esistenza di questo particolare sistema *isotermo* (cioè composto di tre famiglie *isoterme)* Lamé fu tratto a proporsi il problema di determinare tutti i sistemi tripli ortogonali che sono pure isotermi. Il D. va ancora più in là: egli parte, cioè, dall'osservazione fatta dal Bertrand, che in ogni sistema triplo ortogonale e isotermo ciascuna superficie è *isotermica* (ossia decomponibile, mediante le sue linee di curvatura, in quadrati infinitesimi), mentre non è vero che un sistema ortogonale, composto di tali superficie, sia necessariamente isotermo, e si prefigge di determinare tutti i sistemi tripli ortogonali per cui ogni superficie è isotermica. Allo stesso problema, del resto, si è portati studiando un integrale particolare dell'equazione del calore quando si faccia uso di coordinate ellittiche. Le varie soluzioni del problema danno, alcune, dei sistemi noti e d'altronde molto semplici; le altre soluzioni, che corrispondono a sistemi imaginari o trascendenti, l'A. tralascia di esporle, rimandando, per lo sviluppo completo, ad una sua Memoria. Il problema al quale ho ora accennato (e che forma oggetto dei Cap. III e IV) è particolarizzato, nel Cap. V, nel problema che propriamente attirò l'attenzione di Lamé, cioè nella ricerca dei sistemi tripli ortogonali formati da famiglie isoterme; accanto a sistemi già noti a Lamé se ne trova uno che fu scoperto soltanto dal Combescure, ed è costituito da ciclidi imaginarie del 3.° ordine. Oltre a questa specializzazione del problema generale ve ne ha un'altra, pure molto notevole, che si riattacca allo studio dell'equazione $\Delta^2 V = 0$, e consiste nel ricercare tutti quei sistemi per i quali l'equazione suddetta, espressa in coordinate ellittiche, ammette un'infinità di soluzioni della forma $Pf(\rho) f_1(\rho_1) f_2(\rho_2)$, dove ρ, ρ_1, ρ_2 sono i parametri delle tre famiglie, e P è una funzione di ρ, ρ_1, ρ_2. Le numerose specie di sistemi tripli, che così vengono definiti, godono di questa particolarità, che trasformando uno qualunque di essi con una inversione, se ne ottiene un altro rispetto al quale l'equazione $\Delta^2 V = 0$ ammette pure infiniti integrali della forma precedente: di questo fatto si serve

Digitized by Google

appunto il Darboux per semplificare la trattazione. Fra gli altri sistemi che appartengono a questa categoria vi ha quello delle ciclidi omofocali, e il D. ritrova questo risultato direttamente facendo uso di coordinate pentasferiche. Tale studio gli porge occasione di trasformare in coordinate pentasferiche l'equazione $\Delta^2 V = 0$, che prende la stessa forma $\sum_1^5 \frac{d^2 V}{d x_i^2} = 0$ come in coordinate cartesiane ortogonali, e mediante essa si deduce, senza nessun calcolo, il principio delle imagini di Thomson.

Nel Cap. VI, col quale si chiude il secondo libro, il D. partendo dall' esistenza di sistemi tripli ortogonali di cui una famiglia è tutta composta di superficie aventi la stessa curvatura totale negativa, e che sono collegati coi sistemi ciclici di Ribaucour, dà la dimostrazione di un teorema più generale dovuto a Weingarten, il quale fa vedere come si possa, data una superficie a curvatura costante qualunque, costruire un' infinità di altre superficie aventi la stessa curvatura e formanti colla prima una famiglia di Lamé. Ora questi sistemi di Weingarten non sono che un caso particolare di quelli studiati dal Bianchi, nei quali vi ha pure una famiglia di superficie a curvatura costante, ma variabile da superficie a superficie. È appunto dai sistemi di Bianchi che si intitola il presente capitolo, dove si contengono le loro più notevoli proprietà, le quali d'altronde si trovano compendiate nelle *Lezioni di geom. differenziale* del Bianchi stesso, e completamente svolte nelle sue Memorie.

Tale è, a grandi tratti, il contenuto di questo volume, che, se ha un pregio indiscutibile per l'abbondanza dei risultati, dei quali più d' uno non ancora noto alla maggior parte del pubblico matematico, merita ancor più riguardo per l' eleganza e la novità dei procedimenti, tutti improntati a grande generalità e simmetria, e quindi capaci di lasciarsi maneggiare con facilità da chi voglia fare applicazioni delle teorie generali. L' intero libro poi dimostra quanto abbia contribuito, col Darboux, allo sviluppo della teoria dei sistemi ortogonali la valorosa e numerosa schiera dei geometri francesi moderni. Non si può negare che la stessa cura, colla quale l'A. studia le questioni, e la scrupolosità con cui ne spinge l'esame fino all' ultimo, cosa che va tutta a suo onore, producano qua e là un certo senso di stanchezza; come pure più d' una volta vien da domandarsi se certi argomenti, inseriti a guisa di parentesi o di appendici, ancorchè bellissimi per se stessi, non si sarebbero potuti sopprimere a vantaggio dell' economia generale dell' opera. C' è però da osservare, d' altra parte, che non fu certo lo scopo dell' autore di compilare un libro di scuola, ed allora di quelle osservazioni non può rimanere altro che un sentimento di gratitudine per il Darboux, il cui volume varrà

Digitized by Google

a risparmiare, agli studiosi dei sistemi ortogonali, molte delle noie e difficoltà che si presentano ogni qualvolta si ha da ricorrere alle memorie originali. Del resto non è escluso che quelle stesse parti, che appariscono superflue, o quasi, alla lettura del primo volume, siano invece necessarie per lo sviluppo di ciò che si conterrà nel seguito. Il vivo desiderio poi che questo volume lascia, in chi lo legge, di conoscere le parti rimanenti, contiene, senza alcun dubbio, il più bel l'elogio che il suo autore si possa aspettare.

E. DANIELE.

G. LORIA. — *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche.* — Seconda edizione accresciuta e interamente rifatta. — Torino, Carlo Clausen, 1896. 8.°; pag. xx + 346 + (1).

Il libro non è d'ieri; eppure, per quanto meritevole di considerazione, non fu ancora oggetto d'esame per parte de' periodici italiani; gli scienziati stranieri furono più solleciti e gli furon larghi d'encomio. L'A. lo disse « seconda edizione »; ma può veramente chiamarsi un'opera nuova, tanto la prima edizione — inserita nel T. 3², II Serie delle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino; 1887 — è stata in questa accresciuta e rifatta. Scopo dell'opera è « quello di » aiutare la ricerca bibliografica preliminare che deve precedere oggi » qualunque fruttifera investigiazione scientifica, ed adunare alcuni » materiali per la storia della geometria nel secolo XIX ». I principali risultati ottenuti dai geometri, particolarmente da quelli del nostro secolo, sono presentati al lettore aggruppati intorno alle grandi idee che dominano le diverse teorie geometriche, illustrati con una copiosissima bibliografia, in modo da offrire, come modestamente dice l'autore, « piuttosto che una guida, un orario ferroviario in cui il » lettore trova meno descrizioni che enumerazioni di paesi »; le quali enumerazioni però gli porgono solido appoggio « per tracciare il pro- » prio itinerario scientifico ». Non è adunque una vera storia delle idee, non essendo ivi illustrata la genesi, l'evoluzione dei concetti matematici, « la legge di sviluppo che governa i vari rami della geometria »; ma per tutto ciò vi sono raccolti e ordinati ampi materiali.

In un primo capitolo si dà uno « sguardo alle origini e allo sviluppo della geometria fin verso il 1850 ». I capitoli seguenti sono vere monografie dei principali campi d'indagini geometriche: Teoria delle curve piane algebriche — Teoria delle superficie algebriche — Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura — Geometria differenziale — Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analisis situs. Configurazioni — Geometria

Digitized by Google

della retta nello spazio — Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni — Geometria numerativa (1) — Geometria non-euclidea — Geometria degli spazi a quante si vogliono dimensioni — Epilogo, in cui si fa cenno di quelle quistioni che non hanno potuto trovar luogo nei capitali precedenti.

Dopo quanto si è detto basta questo elenco per indicare al lettore il contenuto dell'opera; però noi non ci dilungheremo in più minuta analisi. Osserveremo invece che alcune mende potranno esser rilevate dai cultori delle particolari teorie; ma esse non menomano il pregio dell'opera per chi guardi alla difficoltà di raccogliere e ordinare una bibliografia quale ci offre l'autore, e all'utilità, diremmo al bisogno, di una tal raccolta per lo studioso. Noi, per solo debito d'esattezza, faremo qui cenno di alcune osservazioni che ci è avvenuto di fare nella lettura del libro:

Il primo lavoro metodico sulla risoluzione dei problemi della geometria elementare con una sola apertura di compasso che sia a nostra conoscenza è quello di Ludovico Ferrari pubblicato nel V Cartello della celebre sfida passata fra lui e il Tartaglia (ottobre 1547); non deve adunque attribuirsi la precedenza al Benedetti che pubblicò il suo lavoro sull'argomento nel 1553 (cfr. p. 12).

Nella memoria del Geiser *Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado* (cfr. p. 57) è indicata sommariamente una dimostrazione del fatto che l'Hessiana di una curva generale *d'ordine qualunque* — non solo del 4° — non ha punti moltipli; la dimostrazione veramente non è completa (cfr. Del Pezzo. *Sulla curva Hessiana* ove si dà il necessario complemento), ma, se non si vuole perciò dare la precedenza al Geiser non si dovrà farlo nemmeno pel caso della curva del 4° ordine.

Accanto ad Haton de la Goupillière (p. 79) avrebbe meritato menzione, per lo studio delle evolute successive di una curva algebrica: Halphen, *Mémoire sur les points singuliers des courbes planes algébriques*. (Mém. des sav. étr. T. XXVI, 1879) (2).

Nella memoria del Pannelli *Sulla riduzione delle singolarità di una curva gobba* (citata in nota alla p. 12) non è dimostrata la possibilità di trasformare una curva gobba in una priva di singolarità, bensì quella di sciogliere le singolarità di una curva sghemba introducendone altre ordinarie. Così pure non è dimostrato quel teorema nelle note del Bertini. Nella enumerazione di lavori contenuta in questa

(1) Volentieri consentiamo coll'A. essere questa denominazione più propria di quella comunemente accettata di *enumerativa*.

(2) Sulla testimonianza dell'Halphen (introduzione alla citata memoria) si dovrebbe aggiungere de la Gournerie che « avait tout spécialement appelé l'attention des géomètres » su tal argomento.

Digitized by Google

p. 129 potrebbe aggiungersi: Björling, *Ueber Raumcurven-Singularitäten.* (Archiv d. Matematik u. Ph., T. 8° [71° dalla fondazione] 1889).

Abbiamo fatto cenno a queste poche inesattezze o lacune, lo ripetiamo, perchè, come dice il Tommaseo « sarà lecito anzi dovere notar » del lavoro le parti manchevoli e additare il rimedio, ma ciò senza » spregio, senz'ira, con riverenza e con gratitudine ».

BEPPO LEVI.

LÉVY (LUCIEN). — *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec tables numériques et applications.* Paris, Gauthier-Villars, 1898, pag. VII+237, 8.° gr.

Due scopi, essenzialmente pratici, si è proposto l'A. di questo *Précis;* cioè di soddisfare la domanda degli ingegneri desiderosi di vedere la teoria delle funzioni ellittiche emancipata dalle più elevate teorie del calcolo integrale e condotta sino alle applicazioni numeriche, e di porre in grado uno studente di intendere i grandi trattati, qual è quello dell'Halphen. Tali scopi aumentano le difficoltà che di regola incontra ogni espositore della teoria di cui è parola: chè da un lato è necessario bandire tutto ciò che ha come fine o come mezzo la teoria delle variabili complesse e d'altra parte si è costretti a dar la preferenza a dimostrazioni più complicate ed a limitarsi a raggiungere risultati validi soltanto nel campo delle variabili reali. A questo secondo inconveniente, che è il più grave e l'unico veramente essenziale, l'A. ovvia con alcune osservazioni svolte nel Cap. IX.

La parte principale in questo compendio è rappresentata dalle funzioni di Weierstrass, e ciò conformemente all'indirizzo della scienza moderna; tuttavia le altre funzioni congeneri sono definite e di esse sono esposte tutte le relazioni con quelle di Weierstrass che sono necessarie per passare dalle une alle altre; anzi, poichè i varî espositori della teoria del grande analista di Berlino non si attennero tutti allo stesso sistema di notazioni, l'A. ha cura in fine di rilevarne le differenze e le analogie.

In qual modo la teoria esposta possa applicarsi a problemi è chiarito dall'A. sopra parecchi esempi classici (a cui forse poteva aggiungersi quelli forniti dai poligoni di Poncelet e dall'isocrona paracentrica), tolti dai migliori trattati (Halphen, Greenhill, Appell e Lacour, etc.); ma quello in cui esso differisce dai libri più antichi è la buona collezione di esercizi, la quale raccomanda il libro del sig. Lévy a professori e studenti, e le tavole numeriche, che lo farà ben accetto dagli ingegneri. Introducendo queste ultime l'A. ha seguito le orme di uno dei fondatori della teoria delle funzioni ellittiche, Legendre, il quale (in una lettera scritta a Jacobi il 16 di Luglio del 1829) dichiarava

Digitized by Google

che tutti i suoi sforzi tendevano a fare delle funzioni ellittiche « un véritable instrument de calcul, comme l'ont été jusqu'ici les fonctions circulaires et logarithmiques ».

G. L.

Dott. V. De Pasquale. — *Note all' Algebra complementare del Prof. S. Pincherle. Parte prima. Analisi algebrica.* - Messina, Trimarchi, 1897, VIII-48 p. 8°.

Il prof. De Pasquale, avendo tenuto la supplenza dell' insegnamento dell'Algebra nell' Università di Messina, e avendo adottato come libro di guida per le sue lezioni il *Manuale d'algebra complementare* del prof. Pincherle, trovò opportuno di riparare alla forzata concisione di questo ottimo libro pubblicando, ad uso degli studenti, alcune note destinate ad illustrare varî punti. Tale lavoro, modesto ma accuratissimo, è degno di essere conosciuto, perchè esso potrà riuscire assai utile a tutti coloro che imprendono lo studio dell'Algebra sotto la guida dell' eccellente opera del prof. Pincherle, in cui l'A., ristretto entro limiti troppo angusti di spazio, ha dovuto affidare alla sagacità del lettore troppo più che non possa esigersi dalla media intelligenza dei giovani studenti.

Ecco ora una breve rassegna degli argomenti trattati in questo opuscolo.

Le note 1-10 si riferiscono alle successioni di segmenti, le 11-14 ai principii della teoria dei numeri, le 15 alle successioni di numeri razionali (applicazione a questi delle proprietà delle successioni di segmenti), le 16-19 (compresa la 17 *bis*) ai numeri irrazionali, le 20-22 ai numeri complessi, le 23-25 alle successioni di numeri reali, le 26-28 alle successioni di numeri complessi, le 29-33 ai limiti, la 34 ai numeri figurati, le 35-40 alle serie, le 41-42 ai prodotti infiniti, la 43 alle frazioni continue, le 44-48 alle funzioni razionali intere, infine le 49-51 alle funzioni esponenziali ed iperboliche.

Particolarmente importante è la nota 42, nella quale viene stabilita, con mezzi elementari, la condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta d' un prodotto di infiniti fattori complessi. Il contenuto di essa trovasi riprodotto in un breve lavoro dell' autore col titolo: *Sui prodotti infiniti* inserito nel *Giornale di matematiche*, T. XXXV, 1897.

G. Vivanti.

Digitized by Google

DOTT. TITO VIGNOLI, *Peregrinazioni antropologiche e fisiche* — PROF. G. V. SCHIAPARELLI, *Studio comparativo tra le forme organiche naturali e le forme geometriche pure.* — Milano, U. Hoepli, 1898, 8.° p. XII+367.

Di questo bel volume è soltanto la seconda parte che ha diritto di venire segnalata in questo periodico, onde esclusivamente di essa ci occuperemo e lo facciamo nella convinzione di riuscir graditi a coloro che — ricordando come ogni qualvolta l'illustre astronomo che ne è autore ha distolto il suo sguardo dal cielo per volgerlo alla terra, un ramo dello scibile siasi allietato di qualche progresso — desiderano di essere informati del bottino che egli ha raccolto in questa scorreria fuori del campo in cui egli è maestro e donno.

A base delle considerazioni dello Schiaparelli sta il concetto di *forma geometrica pura* e dei *parametri* che la determinano; sotto quel nome s'intende una figura di cui tutti i punti derivano da una medesima legge, cioè da un medesimo modo di costruzione, sicchè data una parte comunque piccola di essa il resto è interamente determinato; i numeri che ne determinano l'aspetto (non la posizione) sono i *parametri* delle forme; va notato che in una forma geometrica pura qualunque modificazione in una parte esige un conseguente cambiamento di tutte le altre. Ora se si studiano le forme organiche naturali si vede che esse presentano delle analogie con le forme geometriche pure; anzitutto (poichè se una forma organica viene privata di un suo membro essa spontaneamente si completa ritornando al primitivo suo stato) ogni forma organica e determinata dalla conoscenza di una fra le sue parti; inoltre (lo ha dimostrato Darwin) ogni cambiamento in una parte di un organismo necessita una modificazione di tutto il resto; finalmente (opina lo Schiaparelli) in ogni forma organica naturale esistono certi elementi fondamentali determinatori aventi ufficio analogo ai parametri di una forma geometrica.

Per conseguenza si può stabilire una corrispondenza fra le forme pure offerte dalla geometria e le forme organiche. E poichè una forma geometrica ad n parametri può rappresentarsi mediante un punto di uno spazio ad n dimensioni, così ogni forma organica del sistema che risulti assegnando valori qualunque ad n parametri potrà rappresentarsi mediante un punto di quello spazio. Per tal modo il concetto della forma di un organismo è surrogato da quello più semplice della posizione di un punto ed al concetto del passaggio di un organismo da una forma ad un'altra è surrogato quello più semplice del movimento del punto corrispondente da un luogo ad un altro. Allora il *campo* di una varietà è lo spazio comprendente tutti i punti

Digitized by Google

che corrispondono a forme attribuibili ad essa varietà, fra i quali punti uno corrisponderà al tipo normale di quella varietà. I punti corrispondenti ai tipi normali delle varietà sono isolati fra loro; da ognuno partono *n serie analogiche*, formate ciascuna da tipi ognuno dei quali differisce dal tipo normale per un solo parametro; i tipi di una stessa serie hanno fra loro assomiglianze profonde che non isfuggirono a Darwin, e tutte le varie specie nascono partendo dai tipi normali e percorrendo queste serie: invece adunque delle ramificazioni analoghe a quelle che presentano gli alberi e con cui Darwin intendeva idealmente connettere le varie specie, si avrebbero un certo numero (quattro) di tipi normali da cui percorrendo serie analogiche si otterrebbero tutte le specie, tipi i quali funzionerebbero nel campo organico in modo somigliante, in un certo senso, a quello che fanno i corpi semplici pei composti inorganici, i tipi irriducibili di lingue nella glottologia.

Se a questa ipotesi dell'*evoluzione pei tipi fissi*, di cui il Vignoli è fautore, corrisponda completamente alla realtà dei fatti, se essa soddisfi pienamente alle esigenze della scienza, è questione che spetta ai naturalisti di risolvere. Ma è indubitato che anche se — dato e non concesso — il valore dello scritto dello Schiaparelli fosse di ridursi ad una semplice esposizione schematica di una ipotetica derivazione delle specie organiche, essa meriterebbe di prendere posto integralmente in qualsiasi completa esposizione metodica dell'argomento, tanta essendo la profondità ed evidenza delle considerazioni svolte e la scrupolosa esattezza e lucidità del dettato, la cui venustà è tale da richiamare alla mente le più belle pagine di Galileo. Il saggio dello Schiaparelli va poi segnalato come un tentativo di applicare considerazioni di natura prettamente matematica ad una dottrina che pareva ribelle a qualunque sforzo inteso a geometrizzarla; sopra tale tentativo importa richiamare l'attenzione di tutto il mondo che pensa e studia dal momento che oggi, diffusasi la convinzione che « una scienza naturale è scienza solo in quanto è matematica » (Kant), una delle più comuni ed alte aspirazioni degli investigatori è il presentare le varie parti dello scibile sotto la veste di cui Euclide lasciò il più perfetto modello.

G. L.

G. Lazzeri ed A. Bassani. — *Elementi di Geometria.* Con 312 figure intercalate, II ed. migliorata. Livorno, R. Giusti, 1898, 8.° p. XIII + 380.

Di questi *Elementi* basterebbe dire che fu pubblicata la seconda edizione, i pregi loro essendo ormai noti a tutti gli insegnanti. La

Digitized by Google

materia trattata e la sua distribuzione in capitoli, con esercizii relativi, è la stessa che nella prima edizione, della quale mi sono occupato nella *Rivista di Matematica* del *1891:* Definizioni e postulati riguardanti: retta, piano, segmento, angolo e diedro — addizione e sottrazione di segmenti, di angoli e di diedri — prime nozioni su circolo e sfera — rette e piani paralleli o perpendicolari — poligoni — angoloidi — poliedri — distanze — circolo e retta e piano e sfera — angoli nel circolo — coppie di circoli e di sfere — circoli e sfere per punti dati o tangenti a date rette o piani — poligoni e poliedri regolari — angoli e poligoni sferici — circoli sulla sfera — cono e cilindro — equivalenza di poligoni, di superficie poliedriche, di poligoni sferici e di piramidi sferiche, di prismi — limiti — equivalenza di poliedri, del circolo e dei corpi rotondi — rapporti e proporzioni — proporzionalità di linee, di superficie e di solidi — omotetia e similitudine — misura — applicazione dell' algebra alla geometria.

Furono solamente tolte alcune proposizioni, che non sono richieste da nessuno dei nostri programmi scolastici e praticati quei pochi miglioramenti di forma che l' uso della prima edizione, per la scuola, ha potuto suggerire agli autori. Lo scopo, che questi s' eran prefisso, può dirsi raggiunto ottimamente: gli *Elementi,* dei quali ci occupiamo, sono prova indiscutibile della possibilità di fusione della geometria solida con la piana e mettono in evidenza non pochi vantaggi, che tale fusione potrebbe arrecare all' insegnamento. Per questo riguardo sono quindi raccomandabili ai *fusionisti,* che avranno in essi una buona guida, ed agli *antifusionisti* che, leggendoli, potranno sentir scemare o svanire affatto le proprie avversioni.

Il movimento delle figure è spesso invocato in questi *Elementi;* vi compare subito col ben scelto primo postulato della retta (Postulato V, 1.°). E veramente, come disse l' Hoüel ed il De Paolis confermò (1) « è in seguito ad una confusione d' idee che molti geometri vogliono bandire dagli elementi di geometria la considerazione del movimento ».

F. Giudice.

H. Weber. *Lehrbuch der Algebra.* Zweite Auflage. Erster Band. p. XV + 703 8.°. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1898. *Traité d'algèbre supérieure; traduit de l'allemand sur la deuxième édition par* J. Griess. Paris, Gauthier — Villars 1898, 8.° p. XI + 764.

Il nome illustre dell' autore ed il coro di lodi che accompagnò la pubblicazione della prima edizione, ci dispensano dall' aggiungere il

(1) R. De Paolis, *Elementi di Geometria,* Torino 1884, pag. 464.

Digitized by Google

nostro ai molti giudizî che vennero già emessi sopra l'opera di cui ora annunciamo la ripubblicazione, con emendamenti ed aggiunte. Il rapido esaurirsi della prima edizione (la prefazione di essa è datata Novembre 1894, mentre quella della seconda è datata Gennaio 1898) mostra che accadde quel che era prevedibile: l'opera del Weber succede a quelle del Serret come codice di algebra superiore; per mezzo secolo questa diffuse in tutto il mondo civile le idee di Galois nel loro primo stadio di sviluppo, auguriamo alla nuova — ove si rispecchiano i prodotti del fecondo connubio dei metodi di Galois con quelli di Kronecker — altrettanta fortuna ed altrettanta buona influenza. La traduzione francese prova che la prima è conseguita e che la seconda potrà esercitarsi sopra un campo assai vasto.

G. L.

JACOB STEINER'S *Vorlesungen über synthetische Geometrie.* II Theil. *Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von* H. SCHROTER. III Auflage, durchgesehen von R. STURM. Mit 103 Figuren im Text. Leipzig, Teubner, 1898, 8.° p. XVII + 537.

La terza edizione dell'ottimo libro dello Schröter presenta dalla precedente delle differenze più di forma che di sostanza: la nomenclatura fu resa più moderna, il numero degli esercizî proposti crebbe e vennero introdotti dei miglioramenti in alcune dimostrazioni. Benchè trentadue anni siano passati dal momento in cui esso si presentò la prima volta al pubblico, benchè nel frattempo sia aumentato il culto pei metodi prettamente geometrici, pure esso si conserva ancora il più completo trattato geometrico sulla teoria delle coniche e dei sistemi più semplici cui esse danno luogo. Un solo appunto può muoversi allo Schroter, ed è che egli, certo per attenersi esclusivamente ai metodi di Steiner, abbia posto in bando le feconde idee di Staudt, che sole gli avrebbero concesso di dare alle considerazioni che egli svolge sugli elementi immaginarî una base di inscrollabile saldezza. È questo un nèo dell'opera dello Schröter che sembra (cfr. una nota a pag. 195) non essere sfuggita allo Sturm, il quale ne curò la nuova edizione. Se egli non lo tolse è che si avvide che per farlo sarebbe stato necessario un rimaneggiamento del testo tanto profondo che avrebbe fatto perdere all'opera i caratteri suoi più spiccati, e ciò gli avrebbe fatto perdere di vista il suo scopo, che era soltanto quello di ripresentare ai matematici l'opera ben nota del suo illustre predecessore.

G. L.

Digitized by Google

F. KLEIN, *Conférenes sur les mathématiques faites au Congrès de mathématiques tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago, recueillis par le Prof.* ALEX ZIWET, *traduites par* L. LAUGEL. p. 125, 8.° gr. Paris, A. Hermann, 1898.

Il Congresso matematico, che ebbe luogo a Chicago nei giorni seguenti il 21 Agosto 1893 fu accompagnato da una serie di dodici conferenze tenute dal Prof Klein in una delle sale dell' Università di Evanston; sono quelle che, raccolte dal Prof. Ziwet, costituirono l'interessante operetta generalmente nota sotto il nome di « the Evanston Colloquium », sono esse di cui ora annunciamo la traduzione francese. Trattandosi di un libro già noto e giudicato, siamo dispensati dall' addentrarci in un analisi esauriente: d' altronde l' indole generale che essa ha di programma di lavori in gran parte eseguiti fa sì che ben poco di essenzialmente nuovo vi troveranno coloro che studiarono le importanti memorie che rappresentano altrettante pietre miliari nella splendida carriera scientifica del Klein. Merito principale di esse (come del resto di quasi tutte le pubblicazioni dell' illustre professore di Gottinga) è la grande suggestività; e carattere più spiccato l' idea dell' utile che deriva all' analisi dalla cooperazione della geometria, idea questa a cui devono la vita molte delle scoperte di Klein e dei suoi discepoli e seguaci. I temi trattati sono: Clebsch — Lie — Forma delle curve e delle superficie algebriche — La teoria delle funzioni e la geometria — Sul carattere matematico dell' intuizione dello spazio e sui rapporti fra le matematiche pure e le applicate — Trascendenza dei numeri e e π. — I numeri ideali — Risoluzione algebrica delle equazioni — Progressi recenti nelle teorie delle funzioni iperellitiche ed abeliane — Geometria non euclidea — Lo studio delle matematiche a Gottinga. Chiude il volume il capitolo *Matematica* scritto dal Klein per l'opera *Die deutschen Universitaten* dal Prof. Lexis.

La traduzione del Laugel è fedele e si legge con piacere. Tuttavia non è esente da difetti che vogliamo additare specialmente in vista di una nuova edizione. Il titolo delle IV conferenze, che nell' originale è « On the real shape of algebric curves and surfaces », è impropriamente tradotto « Sur la véritable forme etc. »; lo stesso errore fa sì che mentre nell' originale è perfettamente chiaro il significato delle frasi « the question as to the reality of geometric form and the actual shape of algebric curves ande surface was somewhat neglected for a long time », nella traduzione « les questions rélatives a la véritable existence des figures géométriques et à la forme actuelle des courbes etc. », il senso rimane oscuro e forse traviato. Così, perchè tradurre

Digitized by Google

la parola tedesca *Kreisbogendreieck*, a cui Klein fa corrispondere *circular triangle* con la frase vaga *triangle curviligue?* Peggio ancora è il tradurre *Stufen-theorie* con *Théorie des dimensions* (p. 80); mentre si presentava spontanea la dicitura « théorie des espèces », non avendo la parola *espèce* sinora in analisi un preciso significato. Finalmente a torto il sig. Laugel, fa corrispondere a *pencil of rays* la frase « pinceau de droites » (p. 87) invece di « faisceau de droites », dal momento che « pinceau » è adoperato dal Mannheim ed altri nel senso di « congruenza di rette ».

Se la traduzione francese è per signorilità di edizione inferiore all'originale, lo supera per una collezione di utili note bibliografiche di cui l'ha corredata il sig. Laugel.

G. L.

PROGRAMMI E RIASSUNTI
DI CORSI UNIVERSITARI

UNIVERSITÀ DI PISA. CORSO DI GEOMETRIA SUPERIORE - ANNO 1897-98.

Il corso di Geometria superiore nell'anno 1897-98 fu diviso in due parti principali: la prima sulle forme binarie e ternarie; la seconda sulle proprietà proiettive delle cubiche e quartiche piane. L'argomento delle forme era stato l'oggetto esclusivo del corso dell'anno 1896-97 e fu esposto nel 1897-98 con molta concisione, omettendone alcune parti e tralasciando varie dimostrazioni.

I.

1. Forme - Trasformazioni lineari - Funzioni invariantive e teoremi fondamentali relativi - Calcolo simbolico - Forme polari - Come l'annullarsi di una funzione invariantiva esprima una proprietà proiettiva e viceversa - Sviluppo della forma $\Sigma_s A_s a_x^{n-s} a_y^s b_x^s b_y^{m-s}$, a due serie di variabili n arie, per potenze di $(a_x b_y - a_y b_x)$.

Forme binarie:

2. Sviluppo di Clebsch-Gordan - Forme invariantive di un sistema di forme lineari - Forma simbolica di funzioni invariantive qualunque - Scorrimenti.

3. Corrispondenze (m, n) - Corrispondenze simmetriche - Involuzione - Numero degli elementi doppi di una involuzione assorbiti da

Digitized by Google

elementi multipli - Conseguenze per il jacobiano di due forme e per l'hessiano di una forma - Significato dell'annullarsi identico del jacobiano e dell'hessiano.

4. Influenza degli elementi multipli della forma fondamentale sulle forme polari - Conseguenza rispetto ad un fattore comune ad una forma e al suo hessiano - La loro risultante è il quadrato del discriminante della forma (a meno di un fattore numerico).

5. Sistemi completi per una forma quadratica, per due, per un numero qualunque - L'invariante $D'(\alpha-1)^2 - DD''(\alpha+1)^2$ - Interpretazioni geometriche.

6. Sistema completo per una forma cubica - La relazione di Cayley - L'involuzione sizigetica - Interpretazioni geometriche dedotte anche direttamente.

7. Sistema completo per una forma biquadratica - La relazione di Cayley - Forma canonica - Espressione dell'invariante assoluto per il rapporto anarmonico - Gruppo armonico ed equianarmonico - Condizioni diverse per la loro esistenza - Discussione dei varî casi di radici multiple - L'involuzione sizigetica - Interpretazioni geometriche.

Forme ternarie:

8. Variabili cogredienti e contragredienti - Forme invariantive di un sistema di forme lineari - Forma simbolica di forme invariantive qualunque.

9. Sistema completo di una forma quadratica - di due forme quadratiche - Loro fascio - Interpretazioni geometriche - Coniche armoniche - Sistemi lineari di coniche - Jacobiana ed Hermitiana di una rete e di un tessuto - Casi particolari.

10. Principio di trasmissione - Esempi e applicazioni.

11. Curve polari - Jacobiana di una rete di curve - Hessiana, Steineriana, Cayleyana di una curva.

II.

Cubiche piane:

12. Le principali forme invariantive - Gli invarianti S, T - Teorema sulla riducibilità di un prodotto simbolico rispetto all'invariante S - Conseguenze geometriche diverse.

13. Il fascio sizigetico $\lambda f + \mu \Delta$ e la binaria biquadratica $G(\lambda, \mu)$ - Proprietà dei flessi che ne seguono, dedotte anche direttamente - Indicazione e realità dei flessi.

14. Conseguenze varie del teorema che una cubica è hessiana di tre altre - I quadrilateri inscritti nella cubica - Le coniche tritangenti alla cubica - Casi particolari - Generazioni della cubica di Schroter, Grassmann, Chasles, Weyr.

Digitized by Google

15. Teorema di Salmon - Cubiche armoniche ed equianarmoniche - Loro varie definizioni - Le sei cubiche armoniche e le quattro equianarmoniche del fascio sizigetico - Loro significato nel fascio rispetto al gruppo dei quattro trilateri sizigetici.

16. Le polari armoniche dei flessi - Loro configurazione correlativa a quella dei flessi - La schiera delle cayleyane.

17. Le 18 trasformazioni omografiche in sè di una cubica generale.

18. Cubiche con punto doppio, con regresso e degeneri.

Quartiche piane:

19. Alcune forme invariantive - Polohessiana - Polocayleyana - Il covariante S - Il contravariante ϕ - Le cubiche polari cuspidate e degeneri - Singolarità dell'hessiana, della steineriana e della cayleyana.

20. Curve coniugate in generale - Estensione del concetto di polare - La corrispondenza (omografica) delle coniche polari rispetto alla quartica generale - Curve apolari e polilateri polari in generale - Quadrilateri polari della cubica ed esalateri polari della quartica - Loro determinazione.

21. Quartica di Clebsch - Sue varie proprietà - Il suo covariante S - Quartiche che ammettono infinite coniche apolari.

Tangenti doppie di una quartica piana generale:

22. Le 63 serie di coniche quadritangenti - Le 63 coniche tangenzialmente armoniche - Le 315 coniche per gli otto punti di contatto di quattro bitangenti.

23. Terne di serie di bitangenti - Le due specie di tali terne contenenti rispettivamente le 28 bitangenti o 18 soltanto.

24. Cubiche seitangenti - Prima specie, di 28 serie, coordinate alle 28 bitangenti - Trasformazione biunivoca che ne segue della quartica in una sestica gobba - Metodo di Geiser.

25. Seconda specie, di 36 serie, di cubiche seitangenti - Considerazioni analitiche e geometriche relative alla trasformazione biunivoca che ne segue della quartica in una sestica gobba.

Metodo di Hesse:

26. Rappresentazione delle 28 tangenti doppie per le 28 congiungenti di 8 punti associati dello spazio - Come sono rappresentate le terne e quaterne di bitangenti che hanno o no i punti di contatto sopra coniche - Le due specie di 1008 e 5040 cubiche che passano pei 12 punti di contatto di sei bitangenti.

27. Corrispondenza doppia fra il piano della quartica e la stella (di rette) col centro in uno degli otto punti associati - Corrispondenza doppia che ne risulta del piano della quartica in sè (ad ogni punto

Digitized by Google

corrispondendo due rette per esso) - Enti eccezionali, limiti, doppî - Generalita di quella trasformazione doppia e della quartica data dal metodo di Hesse.

28. Rette corresiduali - Teoremi relativi ad esse - Applicazione, date 7 bitangenti (di cui tre qualunque non sono della stessa serie), alla costruzione lineare (di Aronhold) delle altre 21.

29. I 288 sistemi di Aronhold (π di De Paolis) - Le 1008 sestuple di bitangenti, tangenti a coniche - Le 5040 rette ρ - I 6720 punti R - Le 3360 figure Ω.

E. Bertini.

NECROLOGIO

PAOLO SERRET.

Lo scienziato a cui sono dedicate queste linee nacque ad Aubenas il 16 Ottobre 1827 e fu accolto nel 1849 nella Scuola normale superiore di Parigi. Ivi rivelò delle doti non comuni come matematico; ma avendo trascurato di occuparsi a sufficienza di Chimica e di Fisica, dovette abbandonare la scuola col solo diploma di Licenziato in Scienze matematiche; a lui fu pertanto preclusa la strada che mena ai più elevati gradi nel pubblico insegnamento, e perciò egli si consacrò all'insegnamento privato.

Tre opere pubblicate a parte portano il nome del Serret e lo designano come indagatore originale. Sono: I. l'opuscolo, ormai raro, che tratta *Des méthodes en géométrie* (Paris, 1855), e precisamente prima dei metodi relativi a figure finite, poi di quelli relativi alla geometria infinitesimale; II. la tesi intitolata *Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes à double courbure* (Paris, 1859), in base alla quale egli conseguì nel 1860 la dignità dottorale; III. la *Géométrie de direction* (Paris, 1869), nella quale servendosi di coordinate poliedriche, egli espose ed applicò un principio assai ingegnoso e fecondo. A quest'opera si collegano le numerose note che egli per trent'anni ha pubblicato nei *Comptes Rendus* dell'Istituto di Francia e che gli valsero come titoli per ottenere molti premi da questa celebre Accademia; i risultati esposti in questi articoli — di cui per deficienza di spazio non diamo l'elenco — meriterebbero di venire coordinati. Forse a tale impresa avrebbe pensato il Serret stesso, se la morte non lo avesse colpito, ancora nel fiore degli anni, il 24 Giugno ultimo scorso.

NOTIZIE

Alcuni manoscritti relativi alla geometria greca. — Le notizie da noi date (p. 109-110) intorno alle opere superstiti di Erone ci hanno procurata una interessante lettera del Prof. M. Curtze, dalla quale ricaviamo le seguenti informazioni.

Digitized by Google

« Durante un viaggio per studî da me intrapreso nell' anno 1896 coll' aiuto dell' Accademia delle Scienze di Berlino, mi cadde fra mano nella biblioteca universitaria di Cracovia il Cod. 569 (olim DD. IV. 19) ed ivi ho trovato la prima parte della traduzione fatta da Gherardo Cremonese del commento ai primi dieci libri di Euclide redatto da Abûl 'Abbâs al Fadl ben Hatim An-Nairizî, traduzione di cui non si conosceva sinora alcun esemplare. Questo commento di An-Nairîzî venne inserito letteralmente da Al Hadschdschdschii nella sua versione e tradotto da Gherardo senza il testo euclideo. Ivi sono colmate le lacune esistenti nel Codex Leidensis 399, 1, cosicchè si possiede ora completo il commento di Simplicio alle definizioni del I Libro. Mentre Al Hadschdschdschii nel Codex Leidensis 399, 1 non si spinge che sino al VI Libro, troviamo qui il testo del commento di An-Nairizî sino al Libro X. I brani di Erone si estendono sino all' VIII Libro; nel IX e nella prima parte del X se ne trovano altri di fonte greca, mentre nella seconda parte di questo se ne trovano altri che sembrano di origine araba, perchè vi si incontrano frasi quali « si Deus voluit » nonchè delle applicazioni dell' algebra. In principio del VII Libro Gherardo lamenta che alcuni fogli dell' originale siano stati stracciati, ed al termine della prima sezione del X si incontra la completa traduzione delle prop. 13 e 39 del IX, forse l' unico frammento superstite della traduzione di Euclide fatta da Gherardo. Il lavoro di An-Nairizi verrà pubblicato nella *Bibliotheca Teubneriana*, come volume supplementare all' edizione di Euclide curata da Heiberg e Menge; una parte delle spese di stampa verrà sostenuta dall'Accademia di Berlino.

Il suddetto volume della Biblioteca universitaria di Cracovia contiene di traduzioni di Gherardo, oltre quelle di An-Nairîzî, le seguenti: *Liber de crepusculis matutino et vespertino, quem fecit Ali-Homendi* (cioè Alhazen); *Libri III Theodosii de sphaeris; Liber Jeber, quo corrigitur Almagesti Ptolemaei; Liber Merschalac de causa motus orbis et natura ejus; Liber Alhazen de aspectibus* (traduzione attribuita, almeno da Boncompagni, a Gherardo); *Liber Fidei de ymagine speculi*. In quel codice si trova eziandio la traduzione dell'*Ottica di Tolomeo* fatta da « Eugenius Amiraceus Siculus », come pure i libri I-XI di Euclide tradotti da Campano ed i libri XI-XV tradotti da Adelardo, questi ultimi come appendice ad An-Nairizi ».

∴

Premio della fondazione Benecke da conferirsi dalla Facoltà filosofica di Gottinga addì 11 Marzo 1901. Tema per l' anno 1901: « Quale fondamento generale della trattazione matematica dei fenomeni naturali fu da tempo generalmente considerato il *principio di continuità* o più specialmente la *rappresentazione mediante funzioni incondizionatamente integrabili*. Tale fondamento venne introdotto dagli inventori del calcolo differenziale ed integrale come qualchecosa di evidente; ma i progressi dell' indagine matematica hanno da tempo dimostrato che a base di quel principio si trova un grande numero di tacite ipotesi, alle quali non è indispensabile attenersi vista l' imprecisione di quanto attestano i nostri sensi. Col detto principio sta poi in contrasto la ipotesi della costituzione molecolare della materia. La Facoltà desidera perciò uno scritto, richiesto dalllo stato attuale della

Digitized by Google

scienza, il quale esponga, in modo intelligibile a tutti, le relative questioni e sottoponga ad un esame approfondito l'ammissibilità o l'utilità della esposizione consueta. Lo scritto può estendersi dal lato matematico oppure dal lato filosofico e psicologico; ricerche storiche sono desiderate, ma non considerate come indispensabili ». Primo premio 3400 Marchi, secondo 680. I lavori dei concorrenti devono essere inviati anonimi, ma accompagnati da un motto, ripetuto sopra una busta suggellata contenente il nome e l'indirizzo dell'autore; devono essere scritti in una lingua moderna e diretti alla Facoltà suddetta non più tardi del 31 Agosto 1900. I lavori premiati resteranno di assoluta proprietà dell'autore.

∴

Premio della Società Jablonowski di Lipsia. — Questione per l'anno 1901: « *Perfezionare in qualche punto essenziale la teoria delle forme differenziali quadratiche.* La teoria delle forme differenziali quadratiche, la quale venne inaugurata da Riemann e svolta particolarmente da Christoffel e Lipschitz, acquistò una importanza considerevole grazie a ricerche moderne sulla geometria, la dinamica e la teoria dei gruppi di trasformazioni, sicchè ogni progresso di quella teoria produrrà un progresso di queste. Desiderando la Società Jablonowski che la teoria delle forme differenziali quadratiche venga perfezionata in qualche punto importante, rivolge l'attenzione degli indagatori specialmente sulle questioni, che le ricerche di Lie hanno sollevata, concernenti la natura e le proprietà delle forme che annettono gruppi continui di trasformazioni. Pel caso speciale $n = 3$, recentemente il Bianchi (Mem. della Società italiana delle Scienze, Serie III, T. XI, 1897) ha fornito dei contributi importanti; ora è a sperarsi che possa farsi la esposizione, sotto forma invariantiva, dei criteri affinchè una data forma appartenga ad un determinato tipo e che si dimostri remunerativo lo studio delle geometrie vigenti nei corrispondenti spazi ». Premio 1000 Marchi. I lavori dei concorrenti devono essere inviati anonimi, ma accompagnati da un motto, ripetuto sopra una busta suggellata contenente il nome dell'autore ed il suo indirizzo; essi devono venire scritti in tedesco, latino o francese, ed essere spediti al Segretario della Società anzidetta, non dopo il 30 Novembre 1901. I lavori premiati resteranno proprietà della Società.

∴

Il primo centenario di una grande scuola. — Per ricordare il compimento del primo secolo di vita della Scuola normale superiore di Parigi (aperta, per Decreto della Convenzione, il 20 Gennaio 1795) venne pubblicato uno splendido volume (1), adorno di incisioni e ritratti, del quale poco si è parlato, forse perchè esso non si trova in commercio. Esso merita di essere segnalato agli studiosi per le innumerevoli notizie intorno alle persone alle quali si deve se, malgrado le tempeste che ha subite e l'opposizione che ha incontrate, quell'istituto potè in buona misura corrispondere alle aspettative di coloro che, fondandolo, intendevano divenisse « la premiere école du monde ». Del volume di cui parliamo interessano specialmente i nostri let-

(1) *Le centenaire de l'École normale*, 1795-1895. Paris, Hachette, 1895, p. XLV + 699.

Digitized by Google

tori le pagine di cui sono ritratti i metodi didattici di Monge e di Lagrange; quelle pagine da cui si apprende che dell'insegnamento del primo veniva detto « qu'il était trop clair », mentre del secondo dicevasi « qu'il a dans la parole l'embarras et la simplicité d'un enfant ». Interessanti pure sono i particolari intieri sopra Hermite, Bertrand, Briot, Bouquet e Puiseux forniti da J. Tannery nello scritto sopra *L'énseignement des mathématiques à l'École*. Ma quello che merita sopratutto divenire attentamente studiato è il lavoro che S. Lie, per invito dei direttori della Scuola normale, scrisse su *l'Influence de Galois sur le développement des mathématiques:* chi sa quanto il celebre professore di Christania siasi ispirato ai concetti dell'infelice « normalista », capirà di leggeri che niuno era più indicato di lui a tesserne l'elogio! Ci sia lecito, finendo, di riferire le parole di chiusa dell'articolo del Lie: « Ayant vu combien les idées de Galois se sont peu à peu montrées fécondes dans tout de branches de l'analyse, de la géométrie et même dans la méchanique, il est bien permis d'espérer que leurs puissance se manifestera également en physique mathématique. Que nous représentent en effet les phénomènes naturels, si ce n'est une succession de transformations infinitésimales, dont les lois de l'univers sont des invariants? ».

* * *

TEMI DI MATEMATICA POSTI A CONCORSO DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE ESATTE, FISICHE E NATURALI DI MADRID. — I. *Calcolare e disporre con ordine i valori di una o più funzioni trascendenti, di uso frequente nelle applicazioni delle Matematiche e non ancora studiate sotto questo punto di vista.* Il lavoro dovrà avere all'incirca la disposizione delle ordinarie tavole di logaritmi ed essere ordinato in modo che, secondo il giudizio dell'autore, presenti massima comodità; l'approssimazione dei valori sarà determinata in base alle applicaxioni di cui sono suscettibili le funzioni considerate. (Scadenza 31 Dicembre 1898).

II. *Trattato di trigonometria piana — circolare ed iperbolica — e di trigonometria sferica e sferoidale* (Scadenza 31 Dicembre 1899).

Per l'un concorso e per l'altro i lavori dovranno essere scritti in castigliano o latino e presentati anonimi. Al migliore di essa verrà assegnato un *premio* di 1500 *pesetas* e una medaglia d'oro; al seguente in merito l'*accessit* consistente in una medaglia; ed al terzo una *menzione onorevole*.

* * *

TEMA DI MATEMATICA PROPOSTO DALL'ACCADEMIA DEL BELGIO PER L'ANNO 1899 (1). — *Arrecare un contributo importante alla geometria della retta.* Premio L. 600; scadenza 1.° Agosto 1899. Le memorie dovranno essere in francese od in fiammingo e presentate anonime al Segretario perpetuo dell'Accademia.

(1) Per l'anno corrente il tema di concorso era: *Arrecare un contributo importante allo studio delle corrispondenze che si possono stabilire fra due spazi.* L'Accademia accetterebbe, ad esempio, uno studio dei *connessi* con due serie di quattro variabili omogenee nel senso delle ricerche di Clebsch; similmente si potrebbe rispondere con uno studio geometrico ed analitico dell'equazione

$$\Sigma\, a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

ove i coefficienti a_{ik} sono funzioni quadratiche delle variabili $y, \ldots, y_5$ ».

Marro Bertolone, Direttore-Gerente

Genova - Tipografia R. Istituto Sordo-muti - 1898.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abel 44, 70, 74, 75, 97.
Adam 141.
Adelardo 158.
Agnesi 4.
Al Hadschdschii 158.
Ali Homendi (= Alhazen) 158.
Amodeo 111.
Anassagora 101, 103.
Anassimandro 101, 103.
Anassimene 101, 103.
Andreief 87.
Angelitti 76.
An-Nairîzî 158.
Antonelli 76.
Apollonio 21.
Appell 147.
Archimede 4, 19, 101, 102, 104.
Archita 21, 101.
Aristotile 101, 102, 103, 104.
Aronhold 106, 107, 157.

Bäklund 137.
Bahskara 31.
Bailly 17.
Ball (Stawell) 111, 112.
Bassani 158.
Beltrami 17, 18.
Beman 31.
Beneke 158.
Benedetti 104, 111, 146.
Bernoulli 21, 106, 121, 122, 123.
Berteu 94, 95, 96.
Bertin 78.
Bertini 146. 175.
Bertrand 36, 37, 38, 41, 46, 63, 126, 143, 160.
Besthorn 110.
Betti 24, 25, 57, 72.
Bianchi 15, 92, 144, 159.
Bienaymé 122, 123, 124.
Bjerkness 26, 74.
Björling 147.
Börsch 110.
du Bois-Reymond (P.) 18.
Bolyai 17, 111.
Boncompagni 4, 30.
Bond 74.
Bonnet 140.
von Bool 138.
Boole 52, 63.
Booth 7.
Bordin 74.
Borchardt 67, 138.
Bouniakovsky 35, 37, 133.
Bouquel 59, 160.
Braschman 34. 134.
Brendel 110.
Brioschi 62, 73, 80.
Briot 59, 160.
Brocard 55.
Budden 32.

Campano
Cantor (G.) 31.
Cantor (M.) 106.
Capocci 76.
Cardano 104.
Carra de Vaux 110.
Cartesio (*vedi* Descartes)
Casali 2, 3, 4, 5.
Casorati 59, 72.
Cassini 19.
Castelnuovo 58.
Catalan 34, 38, 126, 136.
Cauchy 9, 47, 57, 58, 65, 126, 130.
Cayley 17, 61, 63, 66, 73, 97,
Cesàro 30, 92.
Chasles 5, 47, 66, 70, 155,
Chiò 95.
Christoffel 159.
Clebsch 24, 57, 69, 153, 154, 156, 160.
Clifford, 59.
Cohn 78.
Combescure 143.
Comte 52.
Cornu 20.
Cosserat 141.
Couturat 52.
Cramer 5.
Cremona 80.
Croce 111.
Curtze 111, 157.
Czuber 98, 99.

Dacia (Petri Philomeni de) 111.
Damoiseau 74.
Dandelin 5.
Dante 76.
Darboux 15, 80, 128, 139, 145.

Digitized by Google

Darwin 149, 150.
Dasipodio 111.
Dedekind 11, 52.
Delboeuf 16.
Democrito 51, 101, 103.
Descartes 46, 21, 47, 51, 105.
Dirichlet (Lejeune —) 26, 27, 67.
Dupin 98, 140.

Eisenstein 18.
Ellis (Leslie) 122.
Empedocle 101, 103.
Enestrom 56.
Enneper 77.
Enriques 11-15, 58.
Epicuro 103.
Eratostene 21.
Erdmann 16.
Erone 31, 102, 109. 110, 111, 157, 158.
Euclide 51, 53, 101, 109. 150.
Eudosso 21.
Eugenio (Siculo) 158.
Eulero 31, 34. 35, 36, 42, 75, 130, 133.

Faà di Bruno 95-98.
Fabry 74.
Fermat 131.
Ferrari (Ludovico) 146.
Ferraris (Galileo) 93, 94.
Filone 110.
Fizeau 20.
Fontené 30.
Fourier 58, 62.
Francoeur 74.
Fresnel 24.
Fricke 110.
Frobenius 60.
Fuchs 80, 106.
Fuss 34, 37, 133, 139.

Galilei 3, 104, 105. 150.
Galois 60, 72, 152, 160.
Gauss 17, 26, 27. 28, 29, 36, 59, 74, 75. 76, 110. 111, 123, 130.
Gegner 74.
Geiser 146, 156.
Gérard 30.
Gherardo (Cremonese) 158.
Ghinassi 4.
Gibbs 80.
Giordano (Annibale) 111.
Giudice 31. 151.
G. L. (*vedi* Loria)
Glaisher 122.
Göpel 70.
Goldbach 31.
Gordan 80, 154.
de la Goupillière 146.
de la Gournerie 7, 146.
Goursat 141.
Grandi 3.
Grasmann 17, 155.
Gravé 43, 138.
Gravelius 112.
Green 24.
Greenhill 147.
Gries 31, 151.
Günther (P.) 75.
Guldin 103.

Halley 105.
Halphen 72, 146, 147.
Halsted (Bruce) 80, 112.
Hamilton 28.
Haussner 31.
Heiberg 110, 158.
Heine 90.
Helmert 138.
Helmholtz 16, 17, 18.
Hermite 29, 33, 37, 38, 42, 45, 46, 60, 62, 68, 72, 80, 88, 91, 95, 96, 117, 126, 138, 160.
Hesse 126.
Hilbert 73.
Hooke 105.
Hoüel 151.
Humbert 141.
Huygens 101, 105.

Ippia 51.

Jacobi 28, 45, 52, 60, 61, 65, 67, 68, 70, 75, 84, 96, 147.
Janssen 19.
Januschke 19.
Jeber 158.
John 48.
Jordan 52, 80.
Jung 64.

Kant 16, 150.
Keplero 29, 105.
Khanikof 135.
Kiepert 69.
Kirchhoff 8.
Klein (F.) 17, 22, 31, 61, 69, 80, 113, 154.
Klinkerfues 29.
Konigs 127.
Konigsberger 74.
Korkine 87, 88.
Kortweg 79.
Koslof 129.
Kowalewski 119, 137.
Kroneker 27, 64, 67. 153.
Krüges 110.
Külp 5.
Kummer 70.

Lacour 147.
Lacroix 32.
Lagrange 20, 32, 43, 44, 60, 73, 125, 126, 130, 159.
Laguerre 46-7.
Laisant 38, 51, 54, 82, 93, 131.
Lalande 74.
Lamé 69, 70. 72, 139, 140, 141, 142, 143, 144.
Landen 9.
Langley 32.
Laplace 32, 122, 123, 124.
Lassel 74.
Lauberg 111.
Laugel 75, 153, 154.
Laurent 58.
Lazzari 150.
Lecher 78, 79.
Legendre 17, 35, 36, 53. 59, 74, 83, 84, 92, 97, 147.
Lehmus 6.
Leibniz 51.
Leverrier 95.
Levi (B.) 147.
Lévy (L.) 141, 147.
Lévy (M.) 141.

Digitized by Google

Lexis 153.
Liapounof 132.
Lie 17, 30, 31, 52, 61, 62, 97, 140, 153, 159, 160.
Liguine 127.
Lindemann 80.
Liouville (J.) 31, 60.
Liouville (R.) 74.
Lipkin 6.
Lipkine 127.
Lipschitz 159.
Lobatschewsky 17, 30, 31,
Loewy 19.
Lommel 78.
London-Tanner 32.
Loria 1, 16, 20, 22, 51, 55, 56, 58, 93. 94, 98, 132, 145, 146, 148, 150-152, 154.
Lotze 16.
Lucas 38, 127. 138.
Lucrezio 104.

Maclaurin 49, 98.
Maggi 8-10.
Malfatti 67.
Malmstem 27.
Markof 37, 86, 119, 138.
Mascart 78.
Maschke 72.
Massarini 133.
Maxwell 25.
Menecmo 21.
Menge 158.
Mention 139.
Merschalac 158.
Mestschersky 129.
Midy 6.
Mill 16.
Mittag-Leffler 29, 59, 70, 80.
Moigno 95, 135.
de Moivre 4.
Monge 159.
Montucci 6.
Montucla 21.
Morera 58.

Napoleone 132.
Navier 23.
Nemorario (Giordano) 103, 104.
Nernst 48, 49.
Newcomb 80.
Newton 21, 49, 50, 105. 128.
Nix 110.
Nother 57.

d'Ocagne 138.
Onnes 29.
Ostrogradsky 37, 132.
d'Ovidio 53.

Pannelli 147.
Paoli 32.
de Paolis 53, 151, 157.
Pappo 21, 103.
Pepin 76.
Pascal (B.) 131.
de Pasquale 148.
Peaucellier 126.
Perrine 74.
Petit d'Ormoy 74
Petot 141.
del Pezzo 146
Picard 56-58, 59. 88.
Pietro il Grande 38.
Pincherle 62, 148.
Pitagora 17, 51, 101.
Pizzetti 51.
Platone 21, 51, 101, 102.
Pochammer 190.
Poincaré 20, 24, 46, 47, 57, 80.
Poisson 23, 24. 28, 122, 123.
de Poliguac 36.
Poncelet-74, 131.
Possé 84, 87, 119.
Proclo 51.
Puiseux 19, 140, 160.

Quetelet 5.
Quincke 106.

Raschi 53.
Reimer 21.
Résal 128.
Reye 77.
Ribaucour 140, 141, 141.
Riccardi (Geminiano) 32.
Riccardi (Pietro) 32.
Riccati 5, 140.
Ricci 92, 93.
Riemann 16, 17. 28, 57, 58, 59, 159.
Ritt 6.
Roberval 3, 4.
Robin 74.
Rouché 46, 83.
Rosenberg 111.
Rotschild 80.
Rouquet 140.
Ruffini 32.
Rummer 7.
Russel 16, 17.

Sacchi 6.
Saladini 5.
Salmon 155.
Savoia (Amedeo di) 95.
Savoia (Umberto di) 95.
Schapira 106-109, 133.
Schell 15.
Shering (E.) 26-28, 110.
Schering (K.) 26, 29.
Schiaparelli 149-150.
Schläfli 73.
Schmidt (F.) 111.
Schmidt (W.) 110, 111.
Schöne (H.) 110.
Schöne (R.) 110.
Schonfliess 48-51.
Schröter 152, 155.
Schubert 52.
Schwarz 77, 80.
Segre 15, 18, 93.
Serret (A.) 36, 152.
Serret (P.) 74, 157.
Simart 56-58.
Simon 18, 19, 52, 111.
Simplicio 158.
Smith 31.
Somigliana 26.
Sonine 87, 118, 119.
Spencer 52.
Sporo 21.
Stäckel 110.
Staudt 11, 12, 17, 52.
Steiner 152.
Stratone di Lampsaco 103.
Struve 74.
Sturm (A.) 21-22.
Sturm (C.) 68, 69.

Digitized by Google

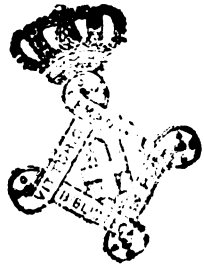
Sturm (R.) 152.
Sylow 60, 97.
Sylvester 62, 80.

Tannery (J.) 160.
Tannery (P.) 109.
Tartaglia 104, 146.
Taylor 34, 49, 50, 58, 98, 132.
Tchébychef 33-45, 81-92, 107, 113-139.
Teodosio 158.
Terquem 46.
Thomson 144.
Tisserand 71.
Tolomeo 158.
Tommaseo 147.
Torricelli 3, 4, 105.

Vailati 51, 106, 111.
Valz 74.
Vassilief 33, 81, 113, 132.
de Verdus 3, 4.
Veronese 78.
Vignoli 149, 150.
Vinci (Leonardo da) 104, 105.
Vitruvio 110.
Vivanti 10. 21, 100, 148.

Watt 39. 127, 123.
Webber 20.
Weber (G.) 26, 75.
Weber (H.) 55, 151, 152.
Weierstrass 58, 59, 60. 75.
Weingarten 144.
Wertheim 111.
Weyr 155.
Wiechert 9.
Wiedemann 77.
Wren 11.
Woepke 12.

Zenone 51.
Zeuthen 4.
Zernof 34.
Ziwet 153.
Zolotaref 44.



Digitized by Google

Digitized by Google

TORINO — CARLO CLAUSEN — TORINO

GINO LORIA

Professore ordinario dell' Università di Genova

IL PASSATO ED IL PRESENTE

DELLE PRINCIPALI

TEORIE GEOMETRICHE

Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta

Lire 8.

INDICE:

CAP. I. — Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850.
CAP. II. — Teoria delle curve piane algebriche.
CAP. IV. — Teoria delle curve algebriche a doppia curvatura.
CAP. V. — Geometria differenziale.
CAP. VI. — Ricerche intorno alla forma delle curve, delle superficie e di altre figure geometriche. Analysis. sitns. Configurazioni.
CAP. VII. — Geometria della retta nello spazio.
CAP. VIII. — Corrispondenze, rappresentazioni, trasformazioni.
CAP. IX. — Geometria numerativa.
CAP. X. — Geometria non-euclidea.
CAP. XI. — Geometria degli spazi a quantesivogliono dimensioni.
CAP. XII. — Epilogo.

Ho l'onore di presentare alla distinta mia clientela un mio nuovo

Catalogo delle Opere di Elettricità e Magnetismo

pubblicate in Italia ed all' Estero dal 1885 al 1897

In questo Catalogo, **oltre le opere in ogni lingua** *pubblicatesi in questo lasso di tempo, trovasi un* **indice minuto ed esatto delle materie, coll' elenco alfabetico** *dei vari autori che ne trattarono. Ognuno si persuaderà dell' importanza ed utilità di questo mio lavoro, potendosi aver subito sott'occhio la bibliografia delle materie e l'indicazione di quelle opere che per un dato studio potrebbero con profitto adoprarsi.*

Sono certo che i signori clienti faranno buona accoglienza a questo Catalogo e che mi vedrò onorato **da molte e importanti commissioni.**

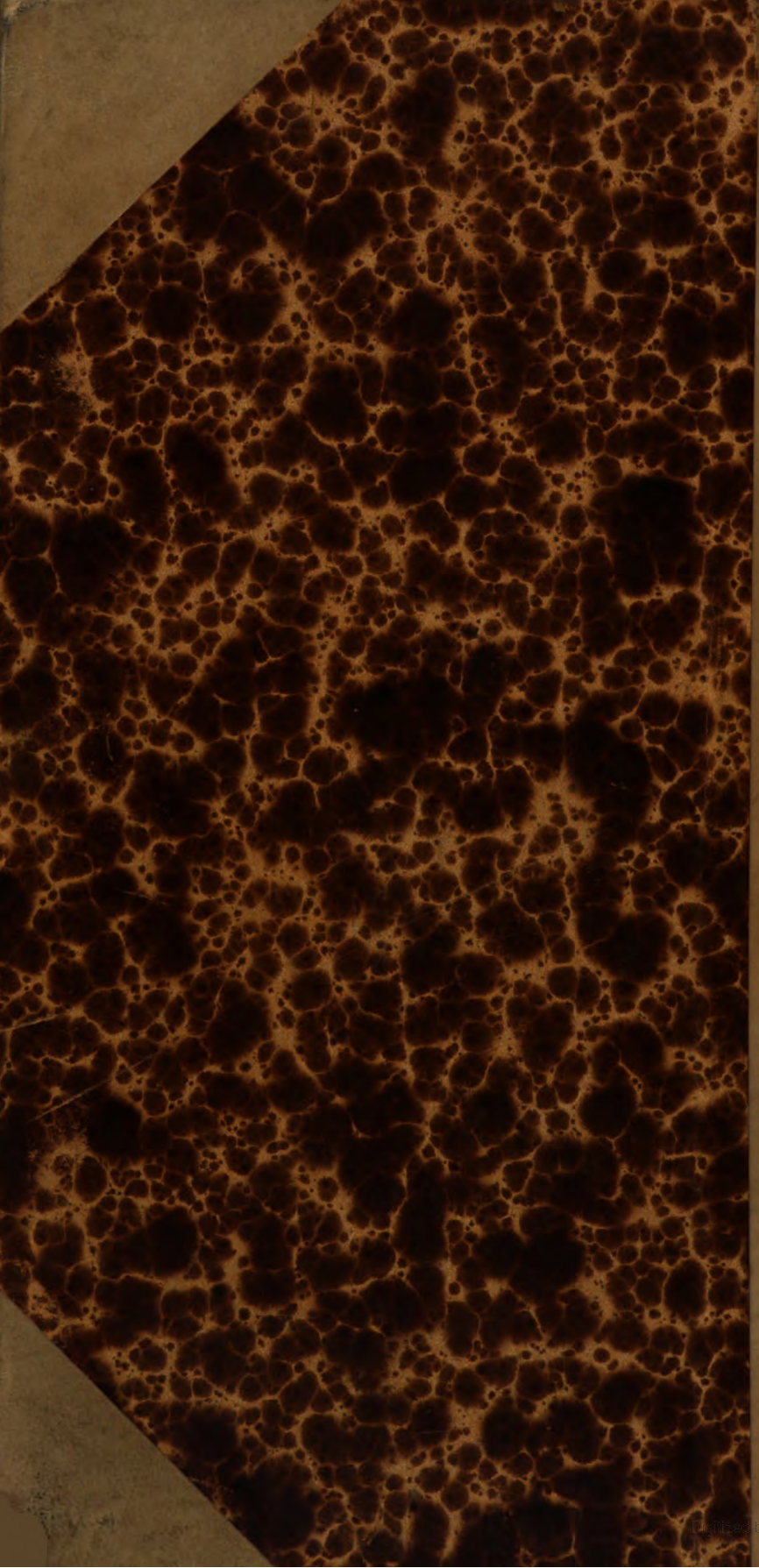
L' invio dei libri vien fatto con tutta sollecitudine e franco, verso rimessa anticipata dell'importo, per parte di chi non ha ancora conto corrente colla mia Casa.

I **giornali** *pure vengono spediti* **direttamente** *dalle amministrazioni, e ciò per guadagnar tempo, in generale senza aumento sui prezzi da me segnati.*

Torino, 1898.

CARLO CLAUSEN
Libreria Internazionale.

Questo Catalogo, per chi non è cliente della Casa, costa **Lire UNA**

Digitized by Google

Digitized by Google